ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ» (МГТУ ГА)

На правах рукописи

Пунт Елена Александровна

МЕТОД ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ПРЕДАВАРИЙНОГО ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ ВОЗДУШНОГО СУДНА НА ОСНОВЕ ЦИФРОВОГО ПОРТРЕТА

2.9.6 – Аэронавигация и эксплуатация авиационной техники

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор, Халютин С.П.

Москва – 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы. Одной из актуальных проблем гражданской авиации является обеспечение безопасности полетов. Однако, авиационные происшествия продолжают происходить, о чем свидетельствуют отчеты о безопасности полетов ФАВТ и IATA [1–5]. Согласно статистике, около 20–30 % авиационных происшествий происходят по причине отказа авиационной техники, в частности, электрооборудования.

Электрооборудование современного воздушного судна (ВС) представляет собой сложный электротехнический комплекс, состоящий из системы электроснабжения (СЭС) и множества потребителей электрической энергии. Функциональные системы ВС, устройства и системы бортового пилотажно-навигационного комплекса получают энергию от СЭС, поэтому надежность СЭС ВС в значительной степени определяет безопасность полетов.

На борту современного ВС СЭС является одной из основных энергосистем. Согласно ряду исследований электрическая энергия обладает преимуществами относительно других видов энергии [6]:

– электрическая энергия может применятся для питания любого типа оборудования ВС;

– достаточно высокий уровень КПД при преобразовании и передаче электроэнергии;

– относительная простота реализации алгоритмов управления СЭС;

– низкая стоимость эксплуатации.

Все это приводит к тому, что количество потребителей электроэнергии на борту ВС возрастает, а следовательно увеличивается нагрузка на электротехнические устройства системы электроснабжения, что может приводить к ухудшению их функционирования или полного выхода из строя.

На данный момент как в России, так и за рубежом ведутся работы по созданию полностью электрического самолета (ПЭС). Согласно концепции ПЭС, питание всего оборудования ВС осуществляется от централизованной электрической системы. Это позволит оптимизировать работу газотурбинных двигателей, сократить суммарную массу оборудования и систем распределения энергии, уменьшить удельный расход топлива и снизить затраты на техническое обслуживание [7]. Также такой самолет является более экологичным, по сравнению с ВС, на борту которых применяются газотурбинные и поршневые двигатели. На данный момент эта задача частично решена на таких ВС как Boeing 787 Dreamliner, Boeing 777, A 380, A400M и др. Бортовые системы таких самолетов используют для своей работы только электрическую энергию.

Таким образом, из вышесказаного можно сделать вывод, что в настоящее время нагрузка на электрооборудование современного ВС возрасла и будет возрастать в дальнейшем. Для современного уровня развития электроэнергетических комплексов характерно появление новых типов электротехнических устройств, а также усложнение условий функционирования существующих. Повышенный уровень энергетической нагрузки на эти устройства приводит к повышению вероятности выхода их из строя, снижению их ресурса. Одним из главных факторов, влияющих на ресурс оборудования, является высокая рабочая температура, которую сложно, а в некоторых случаях и невозможно отслеживать встроенными системами контроля. Исходя из этого, тема исследования, направленная на исследование тепловых режимов бортового электротехнического оборудования, мониторинг и диагностирование их теплового состояния, является весьма актуальной в процессе эксплуатации бортового оборудования.

Степень разработанности темы исследования. Вопросам исследования авиационного электрооборудования, в том числе тепловых режимов, посвящены многочисленные работы В. А. Винокурова, А. Г. Гарганеева, С. А. Грузкова, А. О. Давидова, Б. В. Жмурова, Б. С. Зечихина, Ю. Г. Иванишина, В. В. Иванова, В. С. Кулебакина, В. А. Калия, Д. Л. Калужского, К. В. Капелько, К. В. Ковалёва, Л. К. Ковалёва, А. В. Лёвина, И. И. Лукина, И. А. Мараховского, С. И. Маслова, Н. З. Мастяева, С. М. Мусина, Г. С. Мыцыка, В. Т. Морозовского, С. А. Решетова, М. Ю. Румянцева, А. А. Савелова, И. М. Синдеева, С. П. Халютина, С. А. Харитонова и других.

Теоретическими вопросами эксплуатации, летной годности, в том числе диагностированием состояния воздушных судов и авиационного оборудования, занимались Ю. П. Артеменко, Б. И. Бачкало, В. Г. Воробьев, В. В. Глухов, Ю. В. Козлов, В. Д. Константинов, С. В. Кузнецов, С. Ф. Машошин, В. И. Павлова, Ю. В. Попов, И. М. Синдеев, Ю. М. Чинючин и другие.

Объект исследования – авиационные электротехнические устройства.

Предметом исследования является метод диагностирования предаварийного состояния электротехнических устройств на основе оценки их теплового состояния.

В соответствии с паспортом специальности 2.9.6 Аэронавигация и эксплуатация авиационной техники предмет исследования соответствует требованиям к области исследований, указанным в пункте 4 перечня областей исследования (разработка и совершенствование методов контроля, проведения летных и наземных испытаний, диагностирования и прогнозирования технического состояния авиационной техники на всех этапах ее жизненного цикла).

Цель научного исследования заключается в повышении безопасности полетов воздушного судна за счет предотвращения аварийных режимов в электротехнических устройствах на основе оценки их теплового состояния.

Практическое противоречие между необходимостью постоянного контроля температуры ЭТУ в процессе эксплуатации и отсутствием средств контроля температуры самой нагретой части устройства, а также *противоречие в теории* между возможностями цифровых вычислительных систем, обладающих высокой точностью и быстродействием и отсутствием методов диагностирования ЭТУ с использованием цифровых вычислительных систем приводит к необходимости решения **научной задачи** разработки метода диагностирования предаварийного теплового состояния ЭТУ на основе использования цифрового (теплового) портрета.

Научная задача разбита на ряд подзадач:

– анализ причин тепловых потерь в ЭТУ ВС в нормальных и аварийных режимах работы;

– анализ существующих методов диагностики ЭТУ ВС;

– анализ методов моделирования тепловых режимов ЭТУ ВС;

– разработка математической модели тепловых режимов литийионного аккумулятора на основе метода математического прототипирования энергетических процессов;

– разработка модифицированного метода конечных объемов для получения цифровой динамической моделе теплового поля;

– разработка математической компьютерной модели теплового поля температур литийионного аккумулятора на основе модифицированного метода конечных объемов;

– разработка метода диагностирования ЛИА по тепловым цифровым портретам;

– проведение экспериментальных исследований разработаной методики;

– формирование рекомендаций по применению методики диагностирования ЛИА на основе их тепловых цифровых портретов.

Методология и методы исследования. Для получения основных результатов диссертационной работы использованы базовые методы математического анализа, аналитической геометрии, численные методы решения дифференциальных уравнений, законы термодинамики, электротехники, метод математического прототипирования энергетических процессов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

– разработан модифицированный метод конечных объемов, отличающийся от известного применением метода математическкго прототипирования энергетических процессов, гарантированной точностью расчетов и сведением уравнений математической физики к уравнениям Коши;

– разработана математическая модель тепловых режимов работы литийионного аккумулятора, отличающаяся применением метода математического прототипирования энергетических процессов и использованием модифицированного метода конечных объемов, а также получением аналитического выражения для скалярного поля температур;

– разработан новый метод диагностирования предаварийного теплового состояния литийионного аккумулятора на основе цифрового портрета.

Практическая значимость полученных результатов определяется возможностью практического внедрения разработанной методики диагностирования в бортовом вычислителе ВС,что позволит спрогнозировать через какой промежуток времени произойдет отказ обрудования и своевременно отключить его от приемников электрической энергии. Внедрение полученных результатов позволит повысить уровень эксплуатационной надежности и безопасности полетов. Полученные результаты предназначены для использования инженерно-техническими службами аэропортов и авиакомпаний, разработчиками перспективных систем электрооборудования и электротехнических устройств ВС.

Положения, выносимые на защиту:

– модифицированный метод конечных объемов для численного расчета теплораспределения в литийионном аккумуляторе на основе метода математического прототипирования энергетических процессов;

– методика автоматического формирования уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов по геометрии конечных объемов;

– метод диагностирования предаварийного теплового состояния литийионного аккумулятора на основе цифрового портрета, формируемого с применением модифицированного метода конечных объемов и метода математического прототипирования энергетических процессов;

– результаты экспериментальных исследований.

Автором лично получены все основные результаты, выносимые на защиту:

– модифицированный метод конечных объемов для численного расчета теплораспределения в литийионном аккумуляторе на основе метода математического прототипирования энергетических процессов;

– методика автоматического формирования уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов по геометрии конечных объемов;

– метод диагностирования предаварийного теплового состояния литийионного аккумулятора на основе цифрового портрета, формируемого с применением модифицированного метода конечных объемов и метода математического прототипирования энергетических процессов;

– результаты экспериментальных исследований разработанной методики.

Достоверность результатов проведенных исследований подтверждается совпадением результатов эксперимента с расчетными данными, а также применением известных апробированных математических методов, в том числе метода математического прототипирования энергетических процессов, законов термодинамики и технической диагностики.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на: Научно-технической конференции «Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н. Е. Жуковского» , Москва, МГТУ ГА, 2020, 2022, 2023, 2024 гг.; Международной конференции «Проблемы информатики, электроники и радиотехники» (ПИЭР), Новосибирск, НГТУ, 2020 г.; Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы исследований в авионике: теория, обслуживание, разработки» (АВИАТОР), Воронеж, ВУНЦ ВВС, 2021 г.; Международной конференции молодых специалистов по микро/нано технологиям и электронным приборам (EDM), Алтай, Эрлагол, 2021, 2022, 2023 гг.; Гранте Ученого совета МГТУ ГА, Москва, МГТУ ГА, 2021 г.; Международной ежегодной конференции «Возобновляемая и малая энергетика – 2022. Энергосбережение. Автономные системы энергосбережения стационарных и подвижных объектов», Москва, МЭИ, 2022 г.

По материалам диссертации автором опубликованы научные работы, из них в изданиях ВАК – 1 [92], SCOPUS – 3 [70, 83, 84]. Зарегистрированы 2 программы для ЭВМ [90, 91].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Общий объем диссертации 166 страниц, в том числе 58 рисунков, 10 таблиц. Список литературы содержит 92 наименования.

1 Анализ методов диагностирования тепловых режимов электротехнических устройств

1.1 Анализ существующих электротехнических устройств с точки зрения их тепловых режимов

Система электроснабжения (СЭС) наряду с другими (гидравлической, механической, пневматической) является одной из основных энергосистем воздушного судна (ВС) [6, 7] . Согласно стандарту ГОСТ 54073-2017, СЭС ВС состоит из систем генерирования и/или преобразования, системы распределения электроэнергии и используется для обеспечения электропитанием бортового оборудования (или агрегатов) [8, 9].

На борту современных ВС могут использоваться следующие виды СЭС, каждый их которых имеет свои особености: переменного трехфазного тока напряжением 115/200 В постоянной частоты 400 Гц; переменного трехфазного тока напряжением 230/400 В постоянной частоты 400 Гц; переменного трехфазного тока напряжением 115/200 В переменной частоты 360. . . 800 Гц; переменного трехфазного тока напряжением 230/400 В переменной частоты 360. . . 800 Гц; постоянного тока напряжением 27 В; постоянного тока напряжением 270 В.

Одним из наиболее важных факторов, обеспечивающих безопасность полетов является надежность СЭС ВС. Для обеспечения надежности функционирования и повышения безотказности работы СЭС применяются основные, вспомогательные, аварийные и специальные системы электроснабжения.

Основная СЭС используется для электропитания всех приемников в течение всего времени полета [8, 9]. Вспомогательная СЭС используется для обеспечения электроэнергией ограниченного количества приемников при неработающей вспомогательной силовой установке (ВСУ) или используется как аварийное электроснабжение в полете при полной или частичной потере питания от основной СЭС [8, 9]. Аварийная СЭС осуществляет электропитание в полете ограниченного количества жизненно важных приемников при полной потере электроснабжения от основной или вспомогательной, если она предусмотрена на ВС [8, 9].

Специальная СЭС обеспеченивает электроэнергией только один определенный объект [8, 9].

По способу получению электроэнергии СЭС ВС подразделяется на первичную и вторичную системы электроснабжения [10, 11].

Первичная СЭС характеризуется преобразованием первичной энергии (химической, механической, тепловой и т. д.) в электрическую. В состав первичной СЭС входят генераторы постоянного и переменного тока, химические источники тока [10, 11]. Для вторичной СЭС характерно преобразование электроэнергии, полученной от первичной СЭС, с использованием преобразователей (инверторы, преобразователи постоянного тока, выпрямительные устройства и т. д.) [10, 11].

В электрооборудовании преобразование энергии неизбежно связано с нежелательными явлениями, такими как нагрев, магнитное рассеяние, механические деформации, вибрации и т. д. Наибольшее рассеяние энергии проявляется в виде тепла, нагревающего элементы устройства и устройство в целом. Как правило, нагрев заметно ухудшает характеристики оборудования, а в некоторых случаях может нарушать их работоспособность или выводить их из строя [12].

Тепловой режим электротехнического устройства (ЭТУ) характеризуется совокупностью температур всех элементов, входящих в состав ЭТУ.

Тепловой режим каждого отдельного элемента ЭТУ устройства считается **нормальным**, если выполняются следующие критерии:

– температура элемента устройства в условиях эксплуатации заключена в пределах, ограничивающих диапазон температур, допустимых для данного элемента;

– температура элемента позволяет обеспечить его работу с заданной надежностью.

Предаварийным считается нормальный тепловой режим, который характеризуется приближением температуры объекта к критической и потенциальной возможностью ее достижения с учетом инерционности его тепловых свойств.

На борту ВС генераторы используются для преобразования механической энергии авиадвигателя в электрическую. Процесс преобразования механической энергии в электрическую в генераторе сопровождается потерями энергии, которые характеризуются выделением тепла и нагревом генераторов [13, 14].

В электромеханических генераторах различают следующие виды потерь:

– механические потери; в процессе работы генератора возникает трение между подшипниками, щетками и коллектором, деталей машины о воздух; трение вызывает нагрев составляющих генератора; с увеличением нагрузки механические потери увеличиваются незначительно, однако резко возрастают при повышении частоты вращения якоря генератора [13–15];

– потери в сердечнике якоря на гистерезис и вихревые токи (магнитные потери); данный вид потерь возникает в сердечнике якоря и полюсов как следствие перемагничивания стали этих сердечников и образования в них вихревых токов; магнитные потери являются причиной нагрева сердечника якоря, полюсов; такой вид потерь не зависит от нагрузки машины, но резко увеличивается при увеличении частоты вращения якоря [13–15];

– потери в обмотках якоря и возбуждения (электрические потери); электрические потери возникают по причине прохождения электрического тока через обмотки, каждая из которых обладает сопротивлением; такие потери являются причиной нагрева проводов обмоток; также при протекании тока через щетки и переходное сопротивление между щетками и коллектором возникают потери, вызывающие нагрев щеток и коллектора [13–15];

– добавочные потери; такие потери обусловлены вторичными явлениями, такими как: неравномерное распределение тока по сечению проводников, возникновением вихревых токов в проводниках обмотки якоря [13–15].

Для изоляционных материалов (коллекторов, проводов, обмоток и пр.) характерна определенная нагревостойкость, т. е. способность выполнять свои функции при воздействии температуры в пределах времени, предусмотренного нормальной эксплуатацией оборудования.

Согласно стандарту ГОСТ 8865-93 нагревостойкость изоляционных материалов разбиты на несколько классов, характеризуемых предельно допустимыми температурами при длительной эксплуатации [16]. Для большинства намоточных проводов, используемых для изготовления обмоток генератора, температурный индекс составляет 120, 155 или 180 °C. Нагревостойкие провода с эмалевой изоляцией или со стекловолокнистой изоляцией с пропиткой кремнийорганическим лаком имеют температурный индекс в 200–220 °C. Некоторые провода допускают эксплуатацию при 300 °C в течение не более 300 ч [15].

При длительный режимах работы генераторов предельная температура щеточных узлов не превышает +200 °C, а при кратковременных до +250 °C.

Эксплуатация подшипников и его смазки должна проводиться в определенном диапозоне температур. Для консистентной смазки, при эксплуатации несколько тысяч часов, допускается температура до +150 °C, в сотни часов – свыше +200 °C, при нескольких десятков часов – свыше 250 °C. Для самого подшипника температура не должна превышать +200. . . +400 °C [15].

Для обеспечения нормального режима работы генератора его необходимо охлаждать. Существуют различные виды охлаждения электрических машин (ЭМ) – воздушное, водородное, жидкостное, испарительное, которые различаются интенсивностью теплоотвода от наиболее нагретых элементов.

В основу работы авиационных химических источников тока (ХИТ) [17] положены окислительно-восстановительные химические реакции [18], для которых характерен переход атомов (или ионов) одного реагирующего вещества (восстановителя) к другому (окислителю). Во время химических реакций, при соприкосновении реагирующих веществ происходит выделение тепловой энергии. В случае, если переход электронов от одного вещества к другому осуществляется через проводник первого рода (с электронной проводимостью), в замкнутой цепи потечет электрический ток. Свободная энергия реагирующих веществ освободится в виде электрической энергии [19–21].

По принципу работы ХИТ можно классифицировать на аккумуляторы, гальванические элементы, топливные элементы. Аккумуляторы представляют собой ХИТ, принцип действия которых основан на обратимых электрохимических системах и предназначен для многократного использования их активных веществ, регенерирующих путем заряда. Электрическая энергия в аккумуляторе накапливается во время заряда аккумулятора. Аккумуляторные батареи на борту ВС используются в качестве аварийных источников электрической энергии [19–21]. С помощью бортовых АБ:

– обеспечивается автономный запуск авиационных двигателей на земле и в воздухе;

– осуществляется питание жизненно важных потребителей во время полета, при отказе основных источников электроэнергии;

– сглаживаются пиковые токовые нагрузки при включении мощных бортовых потребителей электроэнергии.

В настоящее время в авиации применяются различные типы АБ [21]: никель-кадмиевые, свинцово-кислотные, литийионные Таблица1.1.

Таблица 1.1 – Технические характеристики авиационных аккумуляторных батарей

Техническая характеристика	Никель-кадмиевые	Свинцово-кислотные	Литий-ионные
Номинальное напряжение, В	1,2	1,75–1,8	3,7
Удельная энергоемкость, Вт·ч/кг	45–65	33–42	110–270
Удельная мощность, Вт/кг	150	180	1800
Среднее время заряда, час	8	более 10	2
Саморазряд за месяц, %	20	30	10
Диапозон рабочих температур, °C	–40. . . +60	–40. . . +40	–20. . . +60

Как следует из таблицы 1.1 и статей [22, 23] наиболее перспективными являются литийионные аккумуляторные батареи. Для таких источников тока характерна наибольшая удельная энергоемкость и номинальное напряжение относительно никель-кадмиевых и свинцово-кислотных АБ. Также, ЛИАБ обладают меньшим саморазрядом, отсутствием эффекта памяти, экологичностью. На данный момент такие АБ не нашли широкого распространения на гражданских ВС, поскольку обладают существенным недостатком – высокой пожароопасностью.

В ряде работ [24–28] представлены результаты исследований тепловых процессов, сопровождающих АБ в процессе заряда и разряда. Согласно результатам этих исследований, можно выделить следующие основные причины тепловых потерь в рабочем цикле АБ:

– при заряде/разряде батареи через ее элементы протекают достаточно большие электрические токи, сопровождающиеся тепловыделением [22];

– при работе АБ происходят химические процессы, сопровождающиеся выделением (или поглощением) энергии и соответсвующими изменеиями температуры [22].

Силовые полупроводниковые преобразователи (СПП) представляют собой статические устройства, предназначенные для преобразования электрической энергии одного вида в электрическую энергию другого вида [30]. В зависимости от функционального назначения СПП бывают [30]:

– выпрямители – преобразователи электрической энергии переменного тока в энергию постоянного тока;

– инверторы – преобразователи энергии постоянного тока в энергию переменного тока;

– преобразователи частоты – преобразователи переменного тока одной частоты в переменный ток другой частоты;

– преобразователи числа фаз – преобразователи переменного ток одного числа фаз в переменный ток другого числа фаз;

– преобразователи постоянного напряжения – преобразователи постоянного тока одного уровня напряжения в постоянный ток другого уровня.

Выделение теплоты в СПП является нежелательным продуктом преобразования энергии. Источниками тепла являются все элементы, через которые протекает электрический ток. Главная причина тепловыделения – прохождение рабочего тока через полупроводниковый переход, на котором имеется напряжение [31].

Потери в СПП пренебрежимо малы при включении/выключении, от обратного тока, от тока в закрытом состоянии и в управляющем электроде. Потери в дросселях и трансформаторах складываются из потерь в обмотках и в сердечнике. Основными видами тепловых потерь в СПП являются [30, 31]:

– потери мощности в проводниках при протекании по ним постоянного тока;

– потери мощности в неферромагнитных проводниках при протекании по ним переменного тока;

– потери мощности в ферромагнитных проводниках при переменном токе;

– потери мощности в нетоковедущих ферромагнитных частях;

– потери в диэлектриках.

1.2 Анализ ненормальных и аварийных режимов электротехнических устройств

Тепловой режим каждого элемента ЭТУ считается ненормальным (аварийным), если:

– температура элемента устройства в условиях эксплуатации превышает диапазон температур, допустимых для данного элемента;

– температура элемента не позволяет обеспечить его работу с заданной надежностью.

В процессе эксплуатации авиационных электротехнических устройств возникают такие режимы работы, при которых устройства не могут в полной мере выполнять свои функции, либо полностью выходят из строя [32].

Причинами таких режимов работы для авиационного электромеханических генераторов являются:

– перегрузка обмоток статора большими токами; такая перегрузка влечет за собой перегрев и последующее разрушение изоляции обмотки, что в результате приводит к короткому замыканию (КЗ);

– внешние КЗ. Токи КЗ достигают высоких значений и даже при кратковременном прохождении таких токов создается опасность для обмотки статора [32];

– внешние несимметричные КЗ. Неравенство токов в фазах статора становится причиной повышенного нагрева ротора и вибрации генератора, что вызывает повреждения устройства в целом [32].

В зависимости от применяемых изоляционных материалов и температуры окружающей среды, допустимые температуры нагрева обмотки статора находятся в пределах 105 °С, а ротора 130 °С. При использовании более теплостойкой изоляции пределы максимальной температуры могут быть увеличены. Чем выше температура нагрева, тем быстрее снашивается изоляция и сокращается ее срок службы. Таким образом, в процессе эксплуатации нельзя допускать нагрев обмоток генератора свыше допустимых температур.

Для аккумуляторных батарей всех электрохимических систем характерно явление теплового разгона. В эксплуатации под тепловым разгоном подразумевают аварийный режим работы АБ – ее возгорание или взрыв во время полета [33–35]. Согласно стандарту ГОСТ Р 58593-2019 тепловой разгон представляет собой неконтролируемое интенсивное увеличение температуры ХИТ в результате появления и протекания экзотермических реакций, тепло от которых вызывает увеличение скорости этих реакций, вызывающее еще большее выделение тепла, что в итоге приводит к воспламенению или взрыву [17].

На основе анализа ряда статей [36–39] и монографии [46] можно выделить следующие причины возникновения теплового разгона в никель-кадмиевых аккумуляторах (НКА):

– длительный перезаряд НКА при постоянном напряжении, в следствие чего происходит разогрев аккумулятора, снижение внутреннего сопротивления и увеличение тока перезаряда, что еще сильнее увеличивает температуру устройства;

– проростание дендритов через сепаратор, что приводит к уменьшению сопротивления в этих местах. Этот процесс приводит к резкому увеличения тока в местах прорастания дендритов и приводит к тепловому разгону.

Ссылаясь на инструкцию по организации эксплуатации авиационных аккумуляторных батарей авиакомпании «Аэрофлот» в работе описывается явление теплового разгона, обусловленное протеканием побочных электрохимических процессов при заряде аккумулятора. В процессе заряда НКА на положительном электроде выделяется кислород, а на отрицательном водород. За счет пропитанного электролитом микропористого сепаратора, служащего «барьером» между электродами, выделяющиеся при заряде газы не достигают их и выводятся в атмосферу; если «барьер» нарушен в силу разрушения сепаратора, нехватки электролита в НКА, образующиеся газы имеют возможность диффузии к разнополярным электродам. По этой причине на отрицательном электроде начинается реакция электрохимического восстановления кислорода и химического окисления кадмия, сопровождающиеся выделением тепла; ток заряда увеличивается при уменьшении ЭДС аккумулятора, чему способствует снижение потенциала кадмиевого электрода; увеличение зарядного тока и разогрев батареи в совокупности приводят к самоускоряющемуся процессу нагрева НКА [46].

Для стандартных свинцово-кислотных батарей с затопленными электролитами тепловой разгон не характерен, поскольку, водород и кислород, возникающие при перезаряде аккумулятора, свободно выводятся из устройства. В аккумуляторах такого типа между пластинами имеется достаточно большое расстояние и большой объем электролита, что позволяет аккумулятору не сильно разогреваться. Существующие на данный момент свинцово-кислотные батареи с плотной упаковкой электродов предрасположены к возникновению теплового разгона.

К основным причинам перегрева свинцово-кислотных аккумуляторов относят:

– перезаряд батареи, приводящий к чрезмерно высокой температуре в устройстве и возникновению теплового разгона; если АБ находится на финальной стадии заряда, энергия, подаваемая на устройство, не используется на реакцию заряда, а выделяется как тепло внутри батареи;

– увеличение тока заряда по причине увеличения температуры аккумулятора при постоянном потенциале заряда; при безконтрольном заряде АБ, токи могут достигать чрезмерно больших значений, что в итоге приводит к разрушению устройства;

– выделение теплоты при реагировании зарядного устройства и аккумулятора; в зарядной установке, при увеличениии температуры, напряжение на батареи понижается, в силу чего зарядное устройство увеличивает ток заряда; увеличение тока заряда приводит к повышению температуры аккумулятора, т. е. зарядное устройство продолжает снабжать устройство все более высоким током, заставляя аккумулятор разогреваться сильнее.

Тепловой разгон является наиболее актуальной проблемой для конструкторов литийионных аккумуляторов. В настоящее время наиболее изученным является тепловой разгон ЛИА, этому посвящен ряд работ российских ученых [38–40]. Большой вклад в изучении теплового разгона литийионных привнесли зарубежные ученые [28, 41–45, 47]. По мнению авторов основной причиной теплового разгона ЛИА является экзотермическая реакция взаимодействия материала электродов с электролитом.

В работе [47] проводилось исследование реакции перезаряда аккумулятора. Причиной теплового разгона в ЛИА в процессе перезаряда являлась экзотермическая реакция между перезаряженным анодом (осажденным литием) и растворителем электролита при высокой температуре.

Тепловой разгон стал причиной нескольких авиационных происшествий. 6 июня 1980 года на борту Ан-22 при заходе на посадку в аэропорт Внуково возник пожар из-за теплового разгона аккумуляторных батарей. По этой причине экипажу не удалось удержать ВС на глиссаде, посадка произошла на сильно пересеченную местность до ВПП. После посадки самолет разрушился и сгорел, погибли три члена экипажа.

7 сентября 2010 года экипаж самолета ТУ-154М RA-85684 выполнял регулярный пассажирский рейс по маршруту Полярный – Москва (Домодедово). Как следует из Приложения к приказу Росавиации от 03.02.2011 № 33 О серьезном авиационном инциденте с самолетом Ту-154М RA-85684 [48] во время полета экипаж самолета передал диспетчеру информацию о проблемах с электропитанием ВС. Диспетчер предпринимал безуспешные попытки связаться с экипажем самолета. После перехода на визуальной полет экипаж самолета Ту-154М RA-85684 принял решение о посадке на взлетно-посадочную полосу неэксплуатируемого аэродрома в районе села Ижма (Республика Коми). В процессе пробега после посадки произошло выкатываение ВС по курсу посадки на 168 метров от выходного торца ВПП. При выкатывании ВС получило повреждение конструкции планера. Пассажиры и экипаж не пострадали.

По результатам проведенных работ была обнаружена неисправность аккумуляторов № 1 и № 2. Первоначальным источником неисправности был аккумулятор № 1. Причиной отказа аккумулятора стал тепловой разгон. По результатам исследования АБ комиссия по расследованию пришла к выводу, что эксплуатация оборудования осуществлялась с нарушением Руководства по техническому обслуживанию [48].

Ряд инциндентов с самолетами Boeing 787 Dreamliner стал причиной приостановки эксплуатации самолетов данного типа. 7 января 2013 года в аэропорту Логан города Бостон произошел перегрев аккумуляторной батареи, ставший причиной возгорания самолета авиакомпании Japan Airlines. Возгорание произошло в пустом самолете, никто не пострадал. 9 января 2013 года американская авиакомпания United Airlines сообщила о подобной проблеме в одном из своих Boeing 787. 16 января 2013 года самолет Boeing 787 Dreamliner авиакомпании All Nippon Airways совершавший рейс из Ямагути в Токио (Япония) был вынужден совершить аварийную посадку на острове Сикоку. Экипаж получил предупреждение о неисправности аккумуляторной батареи. 14 января 2014 года ремонтной бригадой в аэропорту Нарита обнаружила дым, идущий из основного аккумулятора самолета Boeing 787 и неизвестную жидкость, исходящую из аккумулятора. В связи с этими инциндентами, компания Boeing изменила конструкцию основного аккумулятора и конфигурацию его установки. Для корпуса аккумулятора включили корпус из нержавеющей стали и воздуховод, который предназначен для вывода из внутренней части корпуса дыма наружу, что предотвращает попадание дыма в самолет.

В январе 2020 года израильская компнаия Eviation проводила испытания на территории аэропорта Прескотта (Аризона, США) электрического самолета Alice. Испытание закончилось возгоранием ВС. Компания направила Федеральному управлению гражданской авиации США FAA (Federal Aviation Administration, FAA) доклад о случившемся инцинденте с указанием причин произошедшего. Основной причиной возгорания стал перегрев использующейся во время испытаний полностью электрического самолета наземной аккумуляторной системы.

Аварийные режимы работы СПП характеризуются появлением следующих отказов [30]:

– электрический пробой; при приложении к СПП напряжения, превышающего допустимое значение по амплитуде и продолжительности возникает электрический пробой; такой процесс является необратимым и приводит к полному выходу из устройства строя;

– тепловой пробой; при превышении током СПП допустимого значения по амплитуде и продолжительности (или при нарушении охлаждения прибора) происходит тепловой пробой; как и в случае с электрическим пробоем, тепловой пробой может вывести устройство из строя.

Аварийные режимы работы СПП подразделяют на внутренние и внешние. Для внешних аварий характерны отклонения сверхдопустимых значений параметров электроэнергии питающей сети и аварийными режимами работы потребителей электроэнергии, а также перегрузками по току и короткими замыканиями (КЗ) [31]. Также внешние аварийные режимы работы могут вызывать ухудшение формы кривых выходного напряжения, тока, напряжения и тока потребляемого СПП от источника питания. В общем случае, это может приводить как к перегрузке СПП по току, так и может вызывать их пробой. Для внутренних аварий характерно возникновение повышенных значений токов и перенапряжений на всех силовых элементах. Пробой одного из полупроводниковых приборов (например, тиристоров) приводит к возникновению КЗ между двумя фазами. Максимальные значения аварийных токов зависят от момента возникновения КЗ. В цепи поврежденного тиристора аварийное значение тока достигает очень больших значений. Внешние и внутренние КЗ, а также токовые перегрузки подвергают элементы схемы СПП повышенным тепловым и электродинамическим воздействиям [31].

Анализ особенностей физико-химических процессов в ЭТУ в нормальных (регламентных) и аварийных режимах работы и причин тепловыделения позволяет определить необходимые параметры, позволяющие определить состояние ЭТУ и формировать критерии перехода к аварийным режимам.

Таблица 1.2 – Причины тепловыделения ЭТУ в нормальных и аварийных режимах работы

Устройство	Регламентный режим	Аварийный режим	Контролируемые параметры
Генератор	Трение в подшипниках; вихревые токи, перемагничивание в стали статора и ротора; активные сопротивления обмоток статора и ротора	Снижение (увеличение) питающего напряжения при номинальной нагрузке на валу; увеличение нагрузки выше номинальной; обрыв фазы; снижение сопротивления изоляции статорных обмоток; ухудшение вентиляции	Питающее напряжение, ток нагрузки, температура и производная температуры
Аккумуляторные батареи	Джоулево тепло; экзотермическая химическая реакция	Тепловой разгон	Ток нагрузки, температура, их производные
Силовые полупроводниковые преобразователи	Прохождение рабочего тока через полупроводниковый переход	Сверхдопустимые значения параметров электроэнергии питающей сети; аварийные режимы потребителей электроэнергии; перегрузки по току; короткие замыкания	Входное и выходное напряжения, ток нагрузки, температура и производная температуры

1.3 Анализ методов диагностирования электротехнических устройств

Мировой тенденцией современного авиастроения является разработка и внедрение в эксплуатацию полностью электрических самолетов (ПЭС) или «All electric aircraft» [50]. Согласно концепции ПЭС, питание всего оборудования ВС осуществляется от централизованной электрической системы [51–56]. Это позволит оптимизировать работу газотурбинных двигателей, сократить суммарную массу оборудования и систем распределения энергии, уменьшить удельный расход топлива и снизить затраты на техническое обслуживание [56–58]. Также такой самолет является более экологичным, по сравнению с ВС, на борту которых применяются газотурбинные и поршневые двигатели [7]. На данный момент эта задача частично решена на таких ВС как Boeing 787 Dreamliner, Boeing 777, A 380, A400M и др. Бортовые системы таких самолетов используют для своей работы только электрическую энергию [52, 54, 55]. В связи с этим увеличивается роль СЭС ВС, возрастает количество электрических устройств и систем на борту ВС, что в свою очередь может приводить к повышению вероятности появления отказов [50].

Техническое диагностирование представляет собой процесс определения технического состояния изделия с определенной точностью, результатом которого является заключение о техническом состоянии объекта с указанием при необходимости места, вида и причин дефектов [49, 59–61].

В настоящее время диагностирование всех систем ВС осуществляется методом встроенного контроля [62, 63] с использованием сети контроллеров, соединенных в CAN-сеть (рисунок 1.1) [50]. Расположенный на борту ВС разъем предназначен для подключения внешнего устройства считывания и воспроизведения информации. В случае возникновения отказа, диагностика и локализация места отказа проводится с демонтажем всех компонентов системы с целью дальнейшей проверки. Также данный подход используется для предупреждения отказов системы [50]. Основным недостатком такой системы контроля является необходимость демонтажа устройств и проведения специальных мероприятий в течение нескольких дней, в силу чего создается простой воздушных судов [64–66].

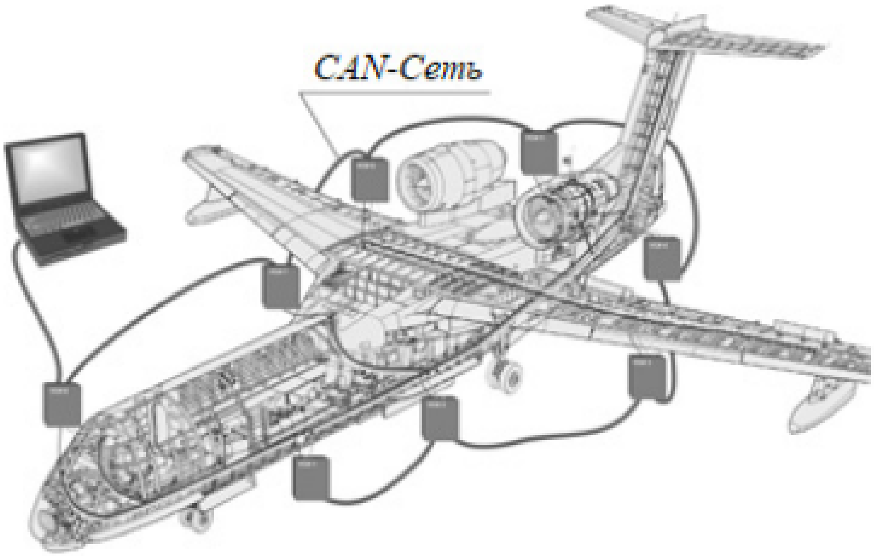

Рисунок 1.1 – CAN-сеть

В настоящее время для диагностирования состояния авиационной техники широко используются методы неразрушающего контроля.

Во время эксплуатации электрогенератора контролируются температуры обомоток и стали статора с помощью термопар. В силу того, что термопара является дифференциальным устройством, температура эталонного спая должна быть известной, чтобы получить точные показания абсолютной температуры [67].

Подробно достоинства и недостатки диагностирования **методом термопар** описаны в работе [67]. Обозначим основные недостатки метода:

– небольшой сигнал напряжения, нелинейная взаимосвязь температура – напряжение, проблемы заземления, что создает сложность при преобразовании напряжения, генерируемого термопарой в показания температуры;

– точность измерения с использованием термопары определяется точностью измерения температуры эталонного спая;

– поскольку термопары состоят из разных металлов, при воздействии окружающих факторов возникает коррозия, приводящая к ухудшению точности;

– на измерение сигнала влияют помехи от электрических и магнитных полей.

В основе **метода сопротивления** лежит свойство металлов изменять свое активное сопротивление в зависимости от температуры. Использование данного метода происходит после отключения питания и полной остановки машины путем подачи на обмотку постоянного тока, измерения сопротивления обмотки методом вольтметра или амперметра и последующего вычисления перегрева обмотки с использованием заранее известной величины сопротивления при фиксированной температуре. Основной недостаток данного метода заключается в необходимости отключения генератора от сети и вывода его из эксплуатации [68].

Метод термометра заключается в контролировании температуры любой доступной части обмотки, к которой можно приложить термочувствительные измерительные устройства. Однако данный метод не обладает достаточной точностью, поскольку при нем контролируется только температура поверхности обмоток, которая может существенно отличатся от температуры всей обмотки.

Метод заложенных термопреобразователей позволяет измерять температуру в месте их установки. Для реализации такого метода контроля температуры на стадии изготовления машины в места, где ожидаются наибольшие превышения температуры устанавливаются термодатчики в виде термопреобразователей. Недостатком данного метода является необходимость установки термопреобразователей еще на этапе изготовления устройства, соответственно, в уже готовой машине установка таких датчиков невозможна. Помимо этого, описанный метод позволяет контролировать температуру локально, только в точке установки датчика [68].

В настоящее время для ранней диагностики дефектов применяются современные высокоэффективные методы на основе инфракрасного излучения. **Метод инфракрасного излучения** является основой приборов, работающих с использованием фиксации инфракрасного излучения, испускаемого нагретыми поверхностями. Тепловизоры позволяют получить картину теплового поля исследуемого устройства для его дальнейшего анализа. Совместно с тепловизором используются радиационные пирометры. На первоначальном этапе исследования с помощью тепловизора определяются объекты с повышенным нагревом, а затем, используя пирометр, определяется его температура [69].

Для контроля температуры ЭТУ применяют косвенные методы, основанные на измерении физических величин, функционально связанных с искомой величиной [70]. Значение величины будет получено из решения уравнения (1.1):

$$N = F(n_1, n_2, \ldots, n_N), \tag{1.1}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_N$ – величины, полученные измерением.

F – функция связи измеренных параметров с контролируемыми

N – вектор контролируемых параметров.

Такой метод измерения не обладает высокой точностью, что является недостатком метода. Однако в случае применения адекватных математических моделей, связывающих наблюдаемые параметры с контролируемыми (температурой отдельных элементов контролируемого устройства), косвенный метод может быть достаточно точным.

В настоящее время широкое применение находит метод математического моделирования процесса нагрева ЭТУ, используя тепловые схемы замещения. Суть метода заключается в замещении ЭТУ, имеющих тепловые потери, на эквивалентную электрическую схему. Для нее составляют уравнения теплового баланса, решают с использованием методов расчета электрических цепей. Однако, такой метод вычисления температуры имеет низкую точность вычисления, так как содержит погрешности из-за неточности тепловой модели, влияния окружающей среды и т.д. Для повышения точности вычисления, периодически уточняются параметры схемы замещения, которые в общем случае являются нелинейными функциями от режимов работы и внешних возмущающих факторов. Однако и это не может обеспечить повышение точности вычисления температуры, так как условия теплоотдачи ЭТУ постоянно изменяются и являются случайными процессами [50, 70].

1.4 Выбор объекта исследования и постановка частных задач

Анализ тепловых режимов работы ЭТУ ВС в нормальных и аварийных режимах работы показал, что тепловые потери при преобразовании энергии негативно влияют на электротехнические устройства. Существующие на данный момент методы, средства диагностики и контроля температуры обладают рядом недостатков, таких как: недостаточная точность, сложность в реализации, необходимость демонтажа устройств с борта ВС.

Из всех электротехнических устройств ВС наиболее уязвимыми с точки зрения температурных режимов являются аккумуляторные батареи. На основе сравнительного анализа различных типов аккумуляторных батарей, наиболее перспективными на данный момент являются литийионные аккумуляторные батареи. Для таких аккумуляторов характерна высокая энергоемкость, слабый саморазряд, отсутствие эффекта памяти, экологичность. Однако, главным недостатком такого типа батарей является пожаро и взрывоопасность, что существенно сказывается на безопасности полетов, что подтверждается примерами авиационных происшествий, произошедших по причине теплового разгона аккумуляторных батарей. Все это позволяет определить цель, объект исследования и основные задачи, которые необходимо решить для достижения цели исследования.

Цель исследования – повышение безопасности полетов воздушного судна за счет предотвращения аварийных режимов в аккумуляторных батареях на основе оценки их тепловых режимов.

Объект исследования – авиационные электротехнические устройства (литийионная аккумуляторная батарея).

Задачи исследования:

– провести анализ причин тепловых потерь ЭТУ ВС в нормальных и аварийных режимах работы, анализ существующих методов диагностики ЭТУ ВС, а также анализ методов моделирования тепловых режимов ЭТУ ВС;

– разработать численный метод расчета теплового состояния оборудования на основе модификации метода конечных объемов;

– разработать математическую и компьютерную модель тепловых режимов литийионного аккумулятора на основе модифицированного метода конечных объемов для формирования цифрового теплового портрета;

– разработать метод диагностирования предаварийного теплового состояния ЛИА по цифровым портретам;

– провести экспериментальные исследования разработанного метода и сформировать рекомендации по применению метода диагностирования предаварийного теплового состояния ЛИА на основе их цифровых портретов.

1.5 Выводы по первой главе

1. Проведен анализ причин тепловыделения для нормальных (регламентных) и аварийных режимов работы:

– для электромеханических преобразователей – вихревые токи и гистерезис в магнитопроводах при перемагничивании стали статора и ротора, трение в подшипниках и др.;

– для литийионных аккумуляторных батарей – экзотермические химические реакции и протекание токов при заряде и разряде;

– для полупроводниковых преобразователей – протекание рабочих токов через открытые и закрытые полупроводниковые переходы и активные сопротивления, высокочастотные потери в полупроводниковых ключах, дросселях и конденсаторах.

2. Рассмотрены основные методы, использующиеся для технической диагностики ЭТУ, выявлены их основные недостатки:

– недостаточная точность;

– возможность измерять температуру локально, только в точке установки датчика;

– необходимость демонтажа устройств с борта ВС с целью дальнейшей диагностики.

3. Определен объект исследования и сформулированы основные задачи исследования.

2 Моделирование тепловых режимов электротехнических устройств

2.1 Анализ методов моделирования температурных режимов электротехнических устройств

Моделирование тепловых режимов ЭТУ как правило сводится к решению задач теплопроводности, для это используют несколько методов: аналитический, аналоговый, графический, численный и экспериментальный. Для решения задач теплопроводности в твердых телах сложной формы широко используются аналитические и численные методы [72]. Условиями реализации этих методов является наличие краевых условий: начальное распределение температур в теле устройства, граничные условия на поверхности. Последние могут быть заданы различными способами, например, температурой поверхности, тепловым потоком, коэффициентом теплоотдачи. Аналитические методы дают непрерывные решения, однако такие методы применимы для простых случаев, когда температура устройства во всех точках одинакова. На практике распределение температур на поверхности ЭТУ существенно отличается от однородного, так как при изготовлении используются материалы с разной теплопроводностью и теплоемкостью. Для более сложных моделей, когда учитываются зависимости температуры от конструкции используются численные методы. Наиболее популярными методами являются: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных объемов (МКО), в которых предполагается численное решение уравнений математической физики.

2.1.1 Метод конечных разностей

Суть метода: Область непрерывного изменения аргумента заменяется на дискретное множество точек, составляющих сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется на функцию дискретного аргумента на сетке. Исходное дифференциальное уравнение (ДУ) заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. Для входящих в уравнение производных используются соответсвующие конечно-разностные соотношения. Такая замена называется аппроксимацией ДУ на сетке [71].

Нестационарный перенос тепла описывается уравнением Фурье – Кирхгофа:

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q_w(x,y,z,t,T), \qquad (2.1)$$

где ρ – плотность, C – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности (для изотропных сред), $Q_w(x,y,z,t,T)$ – мощность внутренних источников тепловыделения.

Уравнение (2.1) устанавливает связь между временным и пространственным изменением температуры в любой точке. Для полного математического описания одного варианта теплопереноса к (2.1) необходимо добавить начальные, граничные, физические и геометрические условия [73].

Алгоритм МКР можно представить следующей последовательностью действий:

– исследуемый объект представляется в виде совокупности узлов;

– частные производные уравнения (2.1) аппроксимируются конечными разностями;

– полученная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) позволяет определить температуры в каждом узле сетки.

Запишем уравнение (2.1) как одномерное уравнение теплопроводности:

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad (0<x<L). \qquad (2.2)$$

Начальные и граничные условия (рисунок 2.1):

$$\begin{aligned}
t=0:&\quad T=T_0,\ \ 0\le x\le L,\\
x=0:&\quad T=T_{\text{л}},\ \ t>0,\\
x=L:&\quad T=T_{\text{п}},\ \ t>0,
\end{aligned}$$

где $T_{\text{л}}$ – температура на левой границе,

$T_{п}$ – температура на правой границе,

T_0 – температура в начальный момент времени.

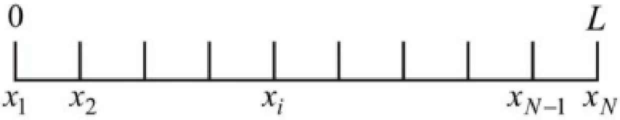

Рисунок 2.1 – Конечно-разностная схема

В момент времени $t = t_n = n_\tau$ значение температуры в i-м узле:

$$T(x_i, t_n) = T_i^n,$$

где τ – шаг интегрирования;

n – номер шага во времени.

Для дифференциальных операторов уравнения (2.2) конечно-разностные аналоги записываются в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_i^n}{h^2}. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получим:

$$\rho C \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_i^n}{h^2} \right), \quad i = 2, ..., N-1, \quad n \geq 0. \tag{2.4}$$

Такую схему аппроксимации можно представить графически (рисунок 2.2).

Описанный ранее способ аппроксимации называется неявной разностной схемой, так как поле температуры на новом временном поле представлено неявно, для его определения необходимо решить уравнение (2.4).

Приведем (2.4) к виду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i, \tag{2.5}$$

где $A_i = C_i = \dfrac{\lambda}{h^2}$; $B_i = \dfrac{2\lambda}{h^2} + \dfrac{\rho C}{\tau}$; $F_i = -\dfrac{\rho C}{\tau} T_i^n$.

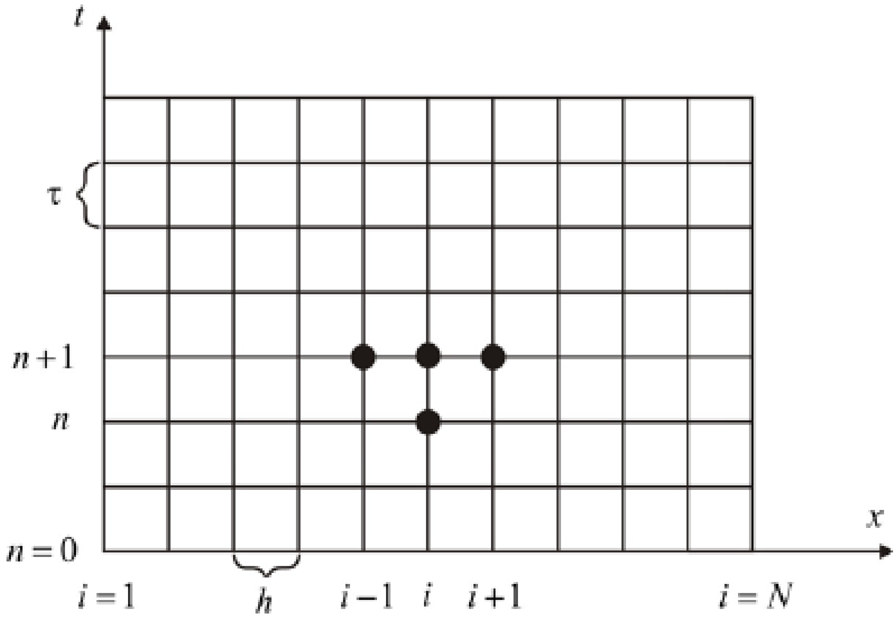

Рисунок 2.2 – Неявная четырехточечная разностная схема

Уравнения такого типа являются трехточечными разностными уравнениями II порядка.

Если существуют такие наборы чисел $\alpha_i, \beta_i (i = 1, ..., N-1)$, при которых:

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \tag{2.6}$$

то уравнение (2.5) преобразуется в двухточечное уравнение I порядка (2.6).

Уменьшив нижний индекс в (2.6) на единицу, получим:

$$T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + \beta_{i-1}. \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5), получим:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + C_i \beta_{i-1} = F_i. \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует:

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}},$$

$$\alpha_i = \frac{A_i}{\beta_i - C_i\alpha_{i-1}},$$

$$\beta_i = \frac{C_i\beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i\alpha_{i-1}}.$$

Для определения α_i, β_i необходимо знать α_1, β_1, которые находятся из левого граничного условия.

Из формулы (2.6) последовательно находятся $T_{N-1}^{n+1}, T_{N-2}^{n+1}, ..., T_2^{n+1}$, при условии, что T_N^{n+1} найдено из правого граничного условия.

Таким образом, решение уравнения (2.5) описанным способом, называемым методом прогонки, сводится к нахождению прогоночных коэффициентов – α_i, β_i и получении T_i^{n+1} по формуле (2.6).

Аппроксимация частных производных также может быть осуществлена и явной схемой.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}.$$

В результате аппроксимации уравнение (2.3) примет вид:

$$\rho C\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \lambda\left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}\right), \quad i = 2, ..., N-1, \quad n \geq 0. \qquad (2.9)$$

Графически это представлено на рисунке 2.3

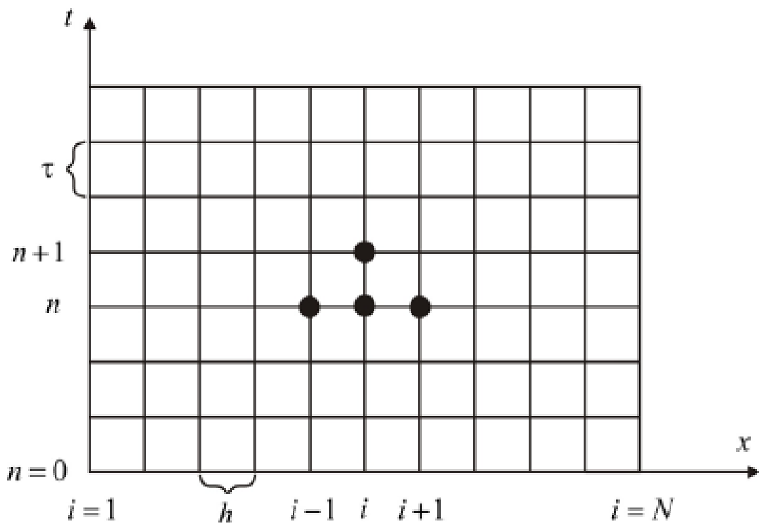

Рисунок 2.3 – Явная четырехточечная разностная схема

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\lambda \tau}{\rho C} \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \right), \quad i = 2, ..., N-1, \quad n \geq 0.$$

Отсюда видно, что для определения неизвестного поля температуры системы решать уравнения для α_i, β_i не требуется.

Таким образом, получена простая СЛАУ для нахождения распределения температуры в различные моменты времени.

Условие устойчивости разностной схемы:

$$\tau < \frac{\rho C h^2}{2\lambda}. \tag{2.10}$$

Из условия (2.10) выбирается шаг интегрирования по временной координате.

2.1.2 Метод конечных элементов

Рассмотрим стационарную двумерную задачу теплопроводности:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q_\nu = 0. \tag{2.11}$$

Граничные условия заданы тепловым потоком вида q_w и конвективным тепловым потоком вида $\alpha(T_w - T_f)$.

В случае применения вариационного подхода задается функционал

$$\begin{gathered} I\left[T(x,y)\right] = \iint\limits_D \left[\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2Q_\nu T \right] dxdy + \\ + \int\limits_L \left(\alpha T^2 - 2q_w T \right) dl, \end{gathered} \tag{2.12}$$

минимизация которого приводит к (2.11). В (2.12) D – это рассматриваемая область, а L – ее граница.

Суть метода конечных элементов заключается в том, что рассматриваемая область разделяется на ряд элементов в каждом из которых задается гладкая функция изменения температуры. Таким образом, температура получается в виде кусочно-гладких функций координат [74]:

$$T(x,y) \approx \sum_{n=1}^{N} a^n f_n(x,y), \tag{2.13}$$

где a_n – неизвестные коэффициенты, имеющие размерность температуры;

$f_n(x,y)$ – заданные функции координат.

Подставляя (2.13) в (2.11), получим, что $I[T(x,y)]$ зависит только от неизвестных коэффициентов a_n.

Для минимизации функционала (2.11) необходимо найти соответсвующие значения a_n из необходимого условия экстремума:

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0,\ ...,\ \frac{\partial I}{\partial a_N} = 0. \tag{2.14}$$

Координатная функция f_n узла n с координатами $x = x_n \neq y = y_n$ должна быть равна 1, а в остальных точках нулю.

При таком выборе координатных функций они равны $\approx u_n$ в узле n.

$$T(x,y) \approx \sum_{m=1}^{N} a_m f_m(x_n,y_n) = a_n f_n = a_n = u_n. \tag{2.15}$$

Исходя из этого уравнения (2.14) примет вид:

$$\frac{\partial I}{\partial u_1} = 0,...,\frac{\partial I}{\partial u_N} = 0. \tag{2.16}$$

Координатные функции f_n строятся на основе каждого элемента. Каждая из функций формы равна 1 в «своей» узловой точке и нулю во всех других узлах данного элемента. Вне элемента все его функции формы также считаются равными нулю. Очевидно, что для каждого элемента требуется количество функций формы, соответствующее количеству узлов в элементе [74].

Температурное поле в элементе аппроксимируется суммой произведений его функций формы на приближённые значения температуры в узлах этого элемента. Для каждого элемента аппроксимация своя, однако на границах при этом должна сохраняться непрерывность поля температуры.

Первый шаг при решении методом конечных элементов – выбор типа конечных элементов. На практике чаще всего используются элементы треугольной формы, криволинейные треугольники, четырехугольники (рисунок 2.4), а для решения трехмерных задач – тетраэдры, призмы, шестигранники (рисунок 2.5).

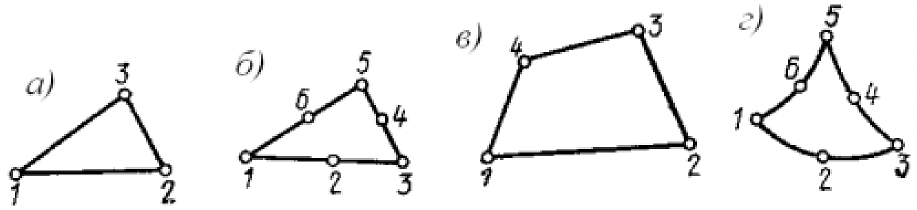

Рисунок 2.4 – Виды конечных элементов для плоских задач

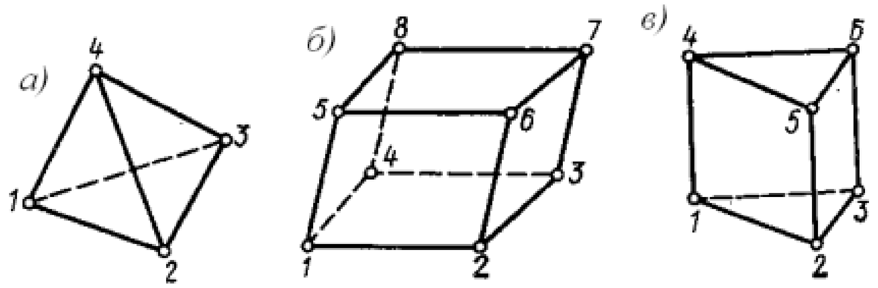

Рисунок 2.5 – Трехмерные конечные элементы

Каждому элементу соответствует особый вид функций формы. Например, при наличии на границе элемента трех узлов используется функция формы, зависящая от координат только линейно:

$$F(x,y) = a + bx + cy. \tag{2.17}$$

Для расчета коэффициентов формулы (2.17) используют формулы аналитической геометрии для расчета длины сторон треугольника, площади треугольника. Учитывая условия, по которым функция формы равна единицы в «своём» узле и нулю во всех других, искомые коэффициенты могут быть рассчитаны по формулам:

$$a_i = \frac{x_j y_k - x_k}{2S}, \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2S}, \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2S},$$
$$a_j = \frac{x_k y_i - x_i y_k}{2S}, \quad b_j = \frac{y_k - y_i}{2S}, \quad c_j = \frac{x_i - x_k}{2S},$$
$$a_k = \frac{x_i y_j - x_j y_i}{2S}, \quad b_k = \frac{y_i - y_j}{2S}, \quad c_k = \frac{x_j - x_i}{2S}.$$

Как описывалось ранее, температура в элементе может быть представлена произведением функций формы на значение температуры в узлах:

$$u^{(m)}(x,y) = u_i F_i^m(x,y) + u_j F_j^m(x,y) + u_k F_k^m(x,y). \tag{2.18}$$

Исходя из (2.17) и (2.18) выражения для производных от температуры по координате примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из (2.19) видно, что значение производных по координате и градиента температуры в каждом элементе постоянно. Отталкиваясь от способа представления температуры (2.13) функционал (2.12) можно представить в виде:

$$I = \sum_{m=1}^{M} I^{(m)}, \tag{2.20}$$

$$I^{(m)} = \iint\limits_{S^{(m)}} \left[\lambda_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \lambda_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2Q_V u \right] dxdy + \int\limits_{L^{(m)}} (\alpha u^2 - 2q_w u) dl. \tag{2.21}$$

Условие минимума для полученного функционала:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{m=1}^{M} I^{(m)} \right) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\partial I^{(m)}}{\partial u_n} = 0, \quad n = 1, ..., N. \tag{2.22}$$

Значение функционала в элементе зависит только от температуры в узлах этого элемента, поэтому в (2.22) производные от $I^{(m)}$ по u_n будут отличны от нуля только для тех элементов, которые включают в себя узел n. Это позволяет формировать систему уравнений МКЭ двумя различными способами.

Способ 1: каждый узел поочередно выбирается и определяется в какой элемент он входит. После этого записывается сумма частных производных по температуре в узле от функционалов соответствующих элементов и приравнивается к нулю. Так формируются N уравнений системы МКЭ.

Способ 2: отдельно рассматривается каждый элемент и определяются какие узлы в него входят. После этого производные от функционала этого элемента по температурам в данных узлах заносятся в соответствующие уравнения системы МКЭ.

Выражение для производной от функционала по температуре в узле i будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial I^{(m)}}{\partial u_i} = 2S^{(n)}\Bigg[\lambda_x\left(b_i b_i u_i + b_i b_j u_j + b_i b_k u_k\right) + \\ +\lambda_y(c_i c_i u_i + c_i c_j u_j + c_i c_k u_k) - \left(\frac{Q_V}{3}\right)\Bigg] + 2L_{ij}\left(\frac{\alpha u_i}{3} + \frac{\alpha u_j}{6} + \frac{q_w}{2}\right).\end{gathered} \tag{2.23}$$

Для формирования системы уравнений удобно представить полученные соотношения в матричной форме:

$$u_i = u_1^{(p)}; u_j = u_2^{(p)}; u_k = u_3^{(p)},$$

где i – первичный узел; j – второй узел; k – третий узел.

Для такой системы нумерации выражение для частных производных от функционала элемента примет вид:

$$g^{(p)} = \begin{pmatrix} g_{ii} & g_{ij} & g_{ik} \\ g_{ji} & g_{jj} & g_{jk} \\ g_{ki} & g_{kj} & g_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^{(p)} & g_{12}^{(p)} & g_{13}^{(p)} \\ g_{21}^{(p)} & g_{22}^{(p)} & g_{23}^{(p)} \\ g_{31}^{(p)} & g_{32}^{(p)} & g_{33}^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

При отсутствии на гранях элемента какого-либо теплового воздействия (2.24) примет вид:

$$g^{(p)} = \lambda_x S^{(p)} = \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} + \lambda S^{(p)} \begin{pmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{pmatrix}, \qquad (2.25)$$

где $\varphi^{(p)}$ – вектор тепловой нагрузки.

$$\varphi^{(p)} = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_i^{(p)} \\ \varphi_j^{(p)} \\ \varphi_k^{(p)} \end{pmatrix}. \qquad (2.26)$$

Вектор тепловой нагрузки (2.26) содержит тепловые воздействия, оказываемые на тело (тепловые потоки на границе, внутренние тепловыделения и т. д.).

В случае, если бы тело состояло из одного элемента, система уравнений имела бы вид:

$$g^{(1)} U^{(1)} = \varphi^{(1)}. \qquad (2.27)$$

На практике такое крупное разбиение неприемлемо. Когда элементов много, вся система уравнений представляется в виде:

$$GU = \varphi, \qquad (2.28)$$

где φ – глобальный вектор тепловой нагрузки;

G – глобальная матрица теплопроводности;

U – вектор-столбец, состоящий из температур в узлах элементов.

Система уравнений решается любым методом решения СЛАУ.

2.1.3 Метод конечных объемов

В основе метода конечных объемов (МКО) лежит интегральная формулировка законов сохранения импульса, массы, энергии и т. д. Для небольшого контрольного объема составляются балансовые соотношения, а их дискретный аналог получается путем суммирования по всем граням выделенного объема потоков.

Метод конечных объемов применим для дискретизации уравнений теплопроводности на структурированных и неструктурированных сетках с различной формой ячеек. Это позволяет решать проблему сложной геометрии расчетной области [75].

Рассмотрим суть метода на примере одномерного уравнения конвекции – диффузии субстанции φ:

$$u(x)\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] + \sigma(x). \quad (2.29)$$

Обозначим поток φ:

$$q = -\lambda\frac{d\varphi}{dx}.$$

Перепишем (2.29) с учетом введенного обозначения:

$$u(x)\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dq}{dx} + \sigma(x). \quad (2.30)$$

Интегрируя (2.30) в интервале $\left[x_{i-\frac{1}{2}}; x_{i+\frac{1}{2}}\right]$:

$$\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x)\frac{d\varphi}{dx}dx = -q_{i+\frac{1}{2}} + q_{i-\frac{1}{2}} + \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sigma(x)dx. \quad (2.31)$$

Интегрируя выражение $\dfrac{d\varphi}{dx} - \dfrac{q}{\lambda}$ в интервале $[x_{i-1}; x_i]$, выразим потоки в полуцелых узлах сетки [75]:

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q(x)}{\lambda(x)}dx = -q_{i-\frac{1}{2}}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} + O(h^3). \quad (2.32)$$

При выводе (2.32) была использована формула прямоугольников для численного интегрирования.

Перепишем (2.32) в виде:

$$q_{i-\frac{1}{2}} = -\lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1 - \varphi_{i-1}}{h_i} + O(h^2), \tag{2.33}$$

где

$$\lambda_{i-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1}.$$

С использованием формулы прямоугольников также аппроксимируется $\sigma(x)$ из (2.29):

$$\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \sigma(x)dx = \hbar_i \sigma_i + O(h^3).$$

Конвективное слагаемое в левой части (2.31) можно аппроксимировать

$$\begin{gathered}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x)\frac{d\varphi}{dx}dx = \int\limits_{\varphi_{i-\frac{1}{2}}}^{\varphi_{i+\frac{1}{2}}} ud\varphi = u_i(\varphi_{i+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2}}) + O(h^2) = \\ = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^2)\end{gathered}. \tag{2.34}$$

Для равномерной сетки последнее выражение будет совпадать с формулой прямоугольников, а точность повысится до $O(h^3)$.

Полученные выражения подставляем в (2.31) и получим:

$$u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2\hbar_i} = \frac{1}{\hbar_i} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}} \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_i)}{\hbar_{i+1}} - \lambda_{i-\frac{1}{2}} \frac{(\varphi_i - \varphi_{i-1})}{\hbar_i} \right) + \sigma_i.$$

Еще один способ аппроксимации конвективного слагаемого заключается в использовании квадратурных формул правых или левых прямоугольников [75]:

$$\begin{gathered}\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(x)\frac{d\varphi}{dx}dx = u^+(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{d\varphi}{dx}\bigg|_{i-\frac{1}{2}} \hbar_i + u^-(x_{i+\frac{1}{2}})\frac{d\varphi}{dx}\bigg| i + \frac{1}{2}\,\hbar_i + O(h^2) = \\ = \left(u^+_{i-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_1 - \varphi_{i-1}}{h_i} \hbar_i + u^-_{i+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_{i+1}} \right) + O(h^2),\end{gathered} \tag{2.35}$$

где

$$u(x)\frac{d\varphi}{dx}\,|_i = u_i^+\nabla^-\varphi_i + u_i^-\nabla^+\varphi_i,$$
$$u_i^+ = \frac{u_i + |u_i|}{2}, \quad u_i^- = \frac{u_i - |u_i|}{2}.$$

В последнем выражении $u^{\pm}_{i\pm\frac{1}{2}}$заменим без потери точности аппроксимации на $u_i^{\pm}$. После подстановки (2.35) в (2.31) получается:

$$u_i\left[\alpha\nabla^+\varphi_i + (1-\alpha)\nabla^-\varphi_i\right] = \frac{1}{\hbar}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-\frac{1}{2}}\frac{\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h_i}\right) + \sigma_i,$$

где α – некоторое положительное число из интервала $0 \le \alpha \le 1$.

Анализируя рассмотренные выше численные методы, можно выделить их достоинства и недостатки (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Достоинства и недостатки численных методов

Метод	Достоинства	Недостатки
Метод конечных разностей	• возможность расчета геометрических конфигураций, для которых простые методы расчета неприменимы; • возможность расчета значений во всех точках сетки; • возможность учета взаимосвязи дифференциальный уравнений; • возможность включить любой закон течения в систему дифференциальных уравнений.	• геометрия определяется методом итераций, так как уравнения необратимы; • невозможно провести вычисления вручную; • для расчетов необходимо больше времени, чем для расчета аналитическим методом; • невозможность получения гарантированной точности решения.
Метод конечных элементов	• геометрия может быть любой; • расчетные параметры определяются в любой точке области; • уравнения метода решаются одновременно, что позволяет учесть все взаимодействия.	• расчетное время больше, чем для МКР; • высокие требования к аппаратным средствам; • требуется глубокое понимание сущности метода; • невозможность получения гарантированной точности решения.

Продолжение таблицы 2.1

Метод	Достоинства	Недостатки
Метод конечных объемов	• конечно-разностные формулы, использующиеся для расчетов более просты и наглядны; • разностная схема консервативна; • необходимо меньшее количество памяти ЭВМ.	• сложность повышения порядка аппроксимации; • невозможность получения гарантированной точности решения.

2.2 Метод математического прототипирования энергетических процессов для электротехнических устройств

В настоящее время для контроля технического состояния различных систем перспективным является применение цифровых двойников [76].

Цифровой двойник представляет собой совокупность математической модели объекта (системы) и ее программного кода, имеющего возможность обмениваться информацией о состоянии с самим исследуемым объектом (системой) (рисунок 2.6).

Рисунок 2.6 – Цифровые двойники объектов

Математическая модель исследуемого объекта (системы) должна обладать высокой точностью, адекватностью и максимально точно описывать процессы, происходящие в объекте или системе [77]. Для создания таких моделей предлагается использовать метод математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП). Данный метод вытекает из известных начал термодинамики и законов сохранения (рисунок 2.7) и обобщает известные формализмы механики, электромагнитной динамики, а также неравновесной нелинейной термодинамики. Помимо этого, ММПЭП учитывает как внутрение силы, обусловленные наличием свободной энергии, так и внешние силы, обусловленные потоками энергии между системой и средой, что является причиной динамических процессов при совершении системой работы [78].

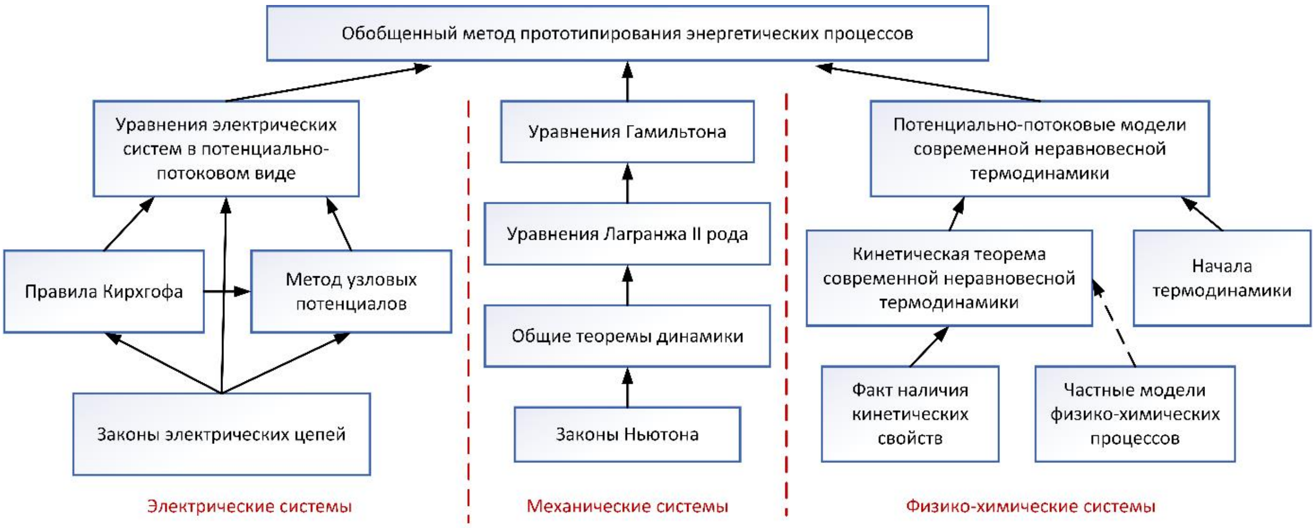

Рисунок 2.7 – Уровни обобщения метода математического прототипирования энергетических процессов

Общие уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов для термодинамических систем могут быть представлены в координатном виде с учетом энергетических степеней свободы (ЭСС) [79]:

1. $dW = dU - T^{*}dS,$
2. $dS = \sum_{i=1}^{m_U} \frac{\delta Q_i}{T_i},$
3. $U = \sum_{i=1}^{m_U} U_i + \sum_{i=1}^{\overline{m_U}} \Phi_i,$

4. $d\Phi_i = -\sum_{k=1}^{m_x} X_{i,k}^{\circ} dx, i = \overline{m_U + 1, \overline{m_U}},$

5. $\dfrac{dx_k}{dt} = \sum_{r=1}^{m_{\Delta x}} b_{k,r} \dfrac{\delta \Delta x_r}{dt} + \left(\dfrac{dx_k}{dt}\right)_{ext} + \left(\dfrac{dx_k}{dt}\right)_{ext}^{(sl)}, k = \overline{1, m_x},$

6. $\dfrac{dU_i}{dt} = \dfrac{\delta Q_i}{dt} - \sum_{k=1}^{m_x} X_{i,k} \dfrac{dx_k}{dt}, i = \overline{1, m_U},$

7. $\dfrac{\delta Q_i}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{\delta Q_{i,j}^{per}}{dt} - \sum_{j=i+1}^{m_U} \dfrac{\delta Q_{j,i}^{per}}{dt} + \sum_{r=1}^{m_{\Delta x}} \beta_{i,r} \dfrac{\delta Q_r^{nek}}{dt} + \left(\dfrac{\delta Q_i}{dt}\right)_{ext} + \left(\dfrac{\delta Q_i}{dt}\right)_{ext}^{(sl)},$

8. $\dfrac{\delta Q_r^{(nek)}}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{m_x} \left(\sum_{l=1}^{m_U} X_{l,k} + \sum_{l=m_U+1}^{m_U} X_{l,k}^{\circ}\right) b_{k,r}\right) \dfrac{\delta \Delta x_r}{dt}, r = \overline{1, m_{\Delta x}},$

9. $\Delta F_{\Delta x, r} = \left(\sum_{i=1}^{m_U} \beta_{i,r} \dfrac{T^*}{T_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{m_x} \left(\sum_{l=1}^{m_U} X_{l,k} + \sum_{l=m_U+1}^{m_U} X_{l,k}^{\circ}\right) b_{k,r}\right),$

$r = \overline{1, m_{\Delta x}},$

10. $\Delta F_{Q_{i,j}} = \dfrac{T^*}{T_i} - \dfrac{T^*}{T_j}, j = \overline{1, i-1}, i = \overline{2, m_U},$

11. $\dfrac{\delta \Delta x_r}{dt} = \sum_{l=2}^{m_U} \sum_{g=1}^{l-1} a_{\Delta x, r}^{Q_{l,g}} \Delta F_{Q_{l,g}} + \sum_{q=1}^{m_{\Delta x}} a_{\Delta x, r}^{\Delta x, q} \Delta F_{\Delta x, q}, r = \overline{1, m_{\Delta x}},$

12. $\dfrac{\delta Q_{i,j}^{(per)}}{dt} = \sum_{l=2}^{m_U} \sum_{g=1}^{l-1} a_{Q_{i,j}}^{Q_{l,g}} \Delta F_{Q_{l,g}} + \sum_{q=1}^{m_{\Delta x}} a_{Q_{i,j}}^{\Delta x, q} \Delta F_{\Delta x, q}, j = \overline{1, i-1}, i = \overline{2, m_U},$

где U_i, $i = \overline{1, m_U}$ – внутренние энергии ЭСС (число ЭСС m_U), которые являются координатами состояния системы [79];

x_k, $k = \overline{1, m_x}$ – прочие координаты состояния (размерность вектора координат состояния – $m_x + m_U$) [79];

Q_i, $i = \overline{1, m_U}$ – количества теплот, полученные ЭСС системы [79];

$b_{k,r}$, $k = \overline{1, m_x}$, $r = \overline{1, m_{\Delta x}}$ – коэффициенты матрицы топологии (получаются из законов сохранения) [79];

$\left(\dfrac{\delta Q_i}{dt}\right)_{ext}$, $\left(\dfrac{\delta Q_i}{dt}\right)_{ext}^{(sl)}$, $i = \overline{1, m_U}$ – внешние потоки теплоты к (от) ЭСС системы и их случайные составляющие [79];

$\left(\dfrac{dx_k}{dt}\right)_{ext}$, $\left(\dfrac{dx_k}{dt}\right)_{ext}^{(sl)}$, $k = \overline{1, m_x}$ – внешние потоки в (из) систему (ы) прочих координат состояния и их случайные систавляющие [79];

$Q_{i,j}^{(per)}$, $j = \overline{1, l-1}$, $i = \overline{2,m_U}$ – перенесенные между ЭСС теплоты (за положительное направление каждой перенесенной между ЭСС теплоты принимается направление от меньшего индекса к большему) [79];

Δx_r, $r = \overline{1,m_{\Delta x}}$ – координаты остальных процессов кроме переноса теплот между ЭСС [79];

$Q_r^{(nek)}$, $r = \overline{1,m_{\Delta z}}$ – некомпенсированные теплоты, например теплота выделяющаяся в результате трения, Джоулева теплота и др., которые образуются при протекании физических и химических процессов (необратимый переход работы в теплоту) [79];

$\beta_{i,r} > 0$, $r = \overline{1,m_{\Delta x}}$, $i = \overline{1,m_U}$ – коэффициенты (доли) распределения некомпенсированных теплот по ЭСС, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{i=1}^{m_U} \beta_{i,r} = 1, r = \overline{1,m_{\Delta x}}$; $T_i > 0$, $i = \overline{1,m_U}$ – температуры (в общем случае неравновесные) ЭСС;

$X_{i,k}$ – термодинамические потенциалы взаимодействия (ТПВЗ) самих ЭСС по координатам состояния x_k;

$X_{i,k}^{\circ}$ – ТПВЗ по координатам состояния x_k, $k = \overline{1,m_x}$, обусловленные взаимодействием между ЭСС [79];

$\Delta F_{Q_{i,j}}$, $j = \overline{1,l-1}$, $i = \overline{2,m_U}$ – динамические силы, движущие процессы переноса теплоты между ЭСС [79];

$\Delta F_{\Delta_{x,r}}$, $r = \overline{1,m_{\Delta x}}$ – динамические силы, движущие прочие процессы [79];

T^* – опорная температура, через которую задается свободная энергия системы W [79];

$\Delta a_{Q_{i,j}}^{Q_{l,g}}$, $\Delta a_{Q_{i,j}}^{\Delta zq}$, $\Delta a_{\Delta_{x,r}}^{Q_{l,g}}$, $\Delta a_{\Delta_{x,r}}^{\Delta_{x,q}}$ – коэффициенты положительно определенной ДМ [79];

S – энтропия системы [79];

U – полная внутренняя энергия системы [79];

Φ_i, $i = \overline{m_U + 1, \overline{m}_U}$ – энергия взаимодействия между ЭСС [79].

Из приведенной системы уравнения 1–4 описывают второе начало термодинамики и носят чисто теоретический характер. Уравнения 5, 8, 9 и 11 для термодинамической системы, которая описывается в данной работе, будут отсутствовать, поскольку фигурирующие в них составляющие некомпенсированных теплот и прочие координаты состояния характерны для систем, в которых совершается работа. В следствии этого, для описываемой термодинамической системы уравнения ММПЭП примут вид:

1. $\dfrac{dU_i}{dt} = \dfrac{\delta Q_i}{dt}, i = \overline{1,m_U},$
2. $\dfrac{\delta Q_i}{dt} = \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{\delta Q_{i,j}^{per}}{dt} - \sum\limits_{j=i+1}^{m_U} \dfrac{\delta Q_{j,i}^{per}}{dt} + \left(\dfrac{\delta Q_i}{dt}\right)_{ext} + \left(\dfrac{\delta Q_i}{dt}\right)_{ext}^{(sl)},$
3. $\Delta F_{Q_{i,j}} = \dfrac{T^*}{T_i} - \dfrac{T^*}{T_j}, j = \overline{1,i-1}, i = \overline{2,m_U},$
4. $\dfrac{\delta Q_{i,j}^{(per)}}{dt} = \sum\limits_{l=2}^{m_U} \sum\limits_{g=1}^{l-1} a_{Q_{i,j}}^{Q_{l,g}} \Delta F_{Q_{l,g}} + \sum\limits_{q=1}^{m_{\Delta x}} a_{Q_{i,j}}^{\Delta x,q} \Delta F_{\Delta x,q}, j = \overline{1,i-1}, i = \overline{2,m_U},$

Основное уравнение обобщенного метода метематического прототипирования [80, 81]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{BAB}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\nabla}_x F) + \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_{ext}, \tag{2.36}$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ – матрица-столбец параметров, определяющих состояние системы;

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(x,U)$ – матрица инцидентности;

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,U)$ – положительно определенная матрица свойств, характеризующая восприимчивость процессов к возмущениям;

$F = F(x,U)$ – функция запасенной энергии внутри системы;

$\left(\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}\right)_{ext}$ – матрица-столбец внешних воздействий на систему.

Приведенное уравнение является математической основой для создания цифровых двойников различных технических систем: механических, электрических и физико-химических [77, 81].

Рассмотрим применение ММПЭП для физико-химических систем.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d\mathbf{U}}{dt} \\ \dfrac{d\mathbf{z}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}_{transf} & \widetilde{\mathbf{U}} \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{Q}}_{transf} & \widetilde{\mathbf{U}} \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{U}} S \\ \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{z}} S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{d\mathbf{U}}{dt} \\ \dfrac{d\mathbf{z}}{dt} \end{pmatrix}_{ext}, \tag{2.37}$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ – матрица-столбец внутренних энергий энергетических степеней свободы;

$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ – матрица-столбец прочих координат состояний;

$\widetilde{\mathbf{Q}}_{transf}$ – матрица инциндентности по перенесенным теплотам;

$\widetilde{\mathbf{U}} = \widetilde{\mathbf{U}}(U,z)$ – матрица, характеризующая изменения внутренней энергии за счет некомпенсированных теплот и совершения работы внутри системы;

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(U,z)$ – матрица баланса;

$\mathbf{A} = \mathbf{A}(U,z)$ – положительно определенная кинетическая матрица;

$S = S(U,z)$ – энтропия системы.

2.3 Математическая модель тепловых режимов литийионного аккумулятора

Важным этапом при разработке метода диагностирования для диагностирования предаварийного теплового состояния ЛИА, основанного на применении цифровых портретов, является разработка математической модели тепловых процессов. Такая модель получена с применением ММПЭП и использовалась при разработке нового численного метода моделирования – модифицированного метода конечных объемов.

Введем следующие ограничения и допущения для разрабатываемой математической модели:

– рассматриваемые области, в которых определяется распределение тепла, должны быть замкнуты (ограничены множеством поверхностей), при этом замыкание всего исследуемого пространства необходимо обеспечить замкнутой поверхностью (границей области), достаточно удаленной от заданного объекта, считая неизменной температуру на его поверхности (т.е. температуру окружающей среды); термин «достаточно удалённый» подразумевает некоторое допущение, которое можно количественно задать вариацией δT температуры на границе области и которая зависит от расстояния от объекта и от свойств теплопроводности окружающей среды [83];

– внутренние области, ограниченные заданными поверхностями, являются замкнутыми, и параметр, характеризующий свойство теплопроводности, считается постоянным [83];

– источники тепла задаются в виде замкнутых геометрических трехмерных объектов, для которых задано распределение температуры во времени и пространстве в виде гладкой дифференцируемой функции четырех аргументов (3-х координат и времени) [83];

– имеется метод определения температуры каждой внутренней области на основе известного распределения температуры на граничной области и экспериментально полученных динамик изменения температуры в измеряемых точках исследуемого объекта [83];

– в рассматриваемой системе вещества не изменяют своего положения в пространстве (не движутся).

2.3.1 Задание геометрии исследуемого литийионного аккумулятора

Геометрия исследуемой области пространства задается уравнениями пересекающихся поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве [83].

Например, для задания геометрии и свойств цилиндрических аккумуляторов удобнее пользоваться цилиндрической системой координат .

$$\begin{cases} r_{\min} \leq r \leq r_{\max}; \\ h_{\min} \leq h \leq h_{\max}; \\ \varphi_{\min} \leq \varphi \leq \varphi_{\max}, \end{cases} \tag{2.38}$$

где r – радиус объекта;

φ – угол;

h – высота объекта.

В декартовой системе координат границы цилидрических поверхностей выглядели бы так:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2; \\ ax + by = 0; \\ z = h, \end{cases}$$

где $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$.

Для призматической формы аккумулятора удобнее пользоваться декартовой системой координат для задания объемов в виде системы неравентсв:

$$\begin{cases} x_{\min} \le x \le x_{\max}; \\ y_{\min} \le y \le y_{\max}; \\ z_{\min} \le z \le z_{\max}, \end{cases} \tag{2.39}$$

где x, y, z – геометрические размеры объекта.

В дальнеших рассуждениях для удобства будем использовать декартовы координаты, в том числе и при рассмотрении цилиндрических объектов, вводя допущение о подобии тепловых процессов при правильной замене координаты φ на линейную координату z.

2.3.2 Модифицированный метод конечных объемов

Согласно предлагаемому методу, для нахождения распределения температуры исследуемого устройства (системы), его исходный объем требуется разбить на несколько объемов (конечные объемы). Для каждого объема будем находить значение температуры, решая уравнения, полученные с использованием метода математического прототипирования энергетических процессов.

Отличительными чертами предлагаемого подхода от известного метода конечных объемов являются:

– для моделирования теплопередачи используется метод математического прототипирования энергетических процессов, корректность которого подтвержена тем, что в его снове лежат законы сохнанения и начала термодинамики;

– в уравнениях теплопроводности используются только производные по времени ввиду того, что принято допущение о том, что вещества в рассматриваемой системе не изменяют своего положения в пространстве;

– окончательная топология разбиения заданного пространства получается только в результате последовательного деления объемов с контролем точности после промежуточных расчетов, а не перед началом процедуры интегрирования.

Формирование уравнений динамики для конечных объемов

Запишем основное уравнение теплообмена, полученное методом математического прототипирования энергетических процессов (2.36), для выделенного i-го сегмента (объёма) (рисунок 2.8).

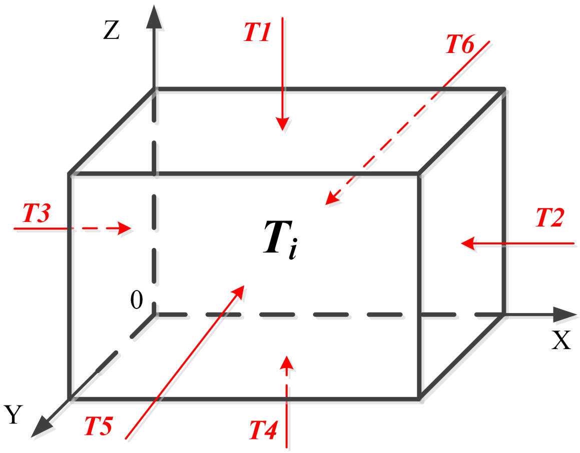

Рисунок 2.8 – i-й сегмент (объект) исследуемой системы

Как видно из рис. 2.8 процесс теплопереноса в общем случае осуществляется по 6-ти граням i-го объема:

$$\begin{aligned} C_i m_i \frac{dT_i}{dt} = \left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{x} + \\ + \left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{y+\Delta y} - \left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{y} + \\ + \left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{z+\Delta z} - \left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{z}, \end{aligned} \tag{2.40}$$

где $\left(\frac{\delta Q_{transf}}{dt}\right)_{x+\Delta x} = \lambda S_x \Delta T_x$ – матрица-столбец переноса теплоты через грань с координатой $x + \Delta x$ по оси X;

T_i – температура i-го объема.

С учетом (2.40) уравнения для всех объемов системы запишутся в матричном виде

$$\mathbf{K}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{\Lambda T} + \mathbf{T}_{01} + \mathbf{Q}, \tag{2.41}$$

где $\mathbf{K} = Cm$ – диагональная матрица коэффициентов, количественно учитывающих инерционные свойства объектов системы (постоянные времени);

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор температур всех объемов;

$\mathbf{T}_{01}$ – матрица, учитывающая влияние температуры окружающей среды на приток (отток) тепла к каждому объёму (не равна нулю только для тех объемов, которые находятся на границе системы),

$$\mathbf{T}_{01} = \begin{pmatrix} \lambda_{0(1)} S_{0(1)} T_0 \\ ... \\ \lambda_{0(i)} S_{0(i)} T_0 \\ ... \\ \lambda_{0(n)} S_{0(n)} T_0 \end{pmatrix}; \tag{2.42}$$

T_0 – температура окружающей среды;

n – количество объёмов, на которое разбита система;

$S_{0(i)}$ – суммарная площадь соприкосновения i-го объёма с границей системы;

$\mathbf{Q}$ – внешний источник теплоты, обусловленный протеканием тока, например для n объемов, в каждом из которых имеется составляющая тока, например вдоль оси Y, матрица $\mathbf{Q}$ запишется так:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} (j_{y1} S_{xz1})^2 \rho_{y1} \dfrac{y_1}{S_{xz1}} \\ ... \\ (j_{yi} S_{xzi})^2 \rho_{yi} \dfrac{y_i}{S_{xzi}} \\ ... \\ (j_{yn} S_{xzn})^2 \rho_{yn} \dfrac{y_n}{S_{xzn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \left(j_{y1}\right)^2 \rho_{y1} \\ ... \\ V_i \left(j_{yi}\right)^2 \rho_{yi} \\ ... \\ V_n \left(j_{yn}\right)^2 \rho_{yn} \end{pmatrix}, \tag{2.43}$$

В уравнении (2.43):

j_{yi} –плотность тока вдоль оси Y для i-го объекта,

ρ_{yi} –удельное электрическое сопротивление вдоль оси Y для i-го объекта,

S_{xzi} – площадь поперечного сечения i-го объекта, перпендикулярно оси Y,

y_i – длина i-го объекта по оси Y,

$V_i = y_i S_{xzi} = x_i S_{yzi} = z_i S_{xyi}$ – объём i-го объекта.

В общем случае, если есть составляющие токов по всем осям, тогда

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} V_1\left[(j_{x1})^2 \rho_{x1} + (j_{y1})^2 \rho_{y1} + (j_{z1})^2 \rho_{z1}\right] \\ \ldots \\ V_i\left[(j_{xi})^2 \rho_{xi} + (j_{yi})^2 \rho_{yi} + (j_{zi})^2 \rho_{zi}\right] \\ \ldots \\ V_n\left[(j_{xn})^2 \rho_{xn} + (j_{yn})^2 \rho_{yn} + (j_{zn})^2 \rho_{zn}\right] \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Матрица $\mathbf{\Lambda}$ характеризует диссипативные свойства системы и состоит из коэффициентов, зависящих от теплопроводности объемов, коэффициентов теплоотдачи и геометрических параметров объемов в соответствии с уравнениями метода математического прототипирования энергетических процессов.

Для i-го сегмента (рис. 2.8) получим уравнение в соответствии с (2.41):

$$\begin{gathered} C_i \rho_i V_i \frac{dT_i}{dt} = \alpha_{i(i-1)x} S_{i(i-1)x} T_{(i-1)x} - \alpha_{i(i-1)x} S_{i(i-1)x} T_i - \alpha_{i(i+1)x} S_{i(i+1)x} T_i + \\ + \alpha_{i(i+1)x} S_{i(i+1)x} T_{(i+1)x} + \alpha_{i(i-1)y} S_{i(i-1)y} T_{(i-1)y} - \alpha_{i(i-1)y} S_{i(i-1)y} T_i - \\ - \alpha_{i(i+1)y} S_{i(i+1)y} T_i + \alpha_{i(i+1)y} S_{i(i+1)y} T_{(i+1)y} + \\ + \alpha_{i(i-1)z} S_{i(i-1)z} T_{(i-1)z} - \alpha_{i(i-1)z} S_{i(i-1)z} T_i - \alpha_{i(i+1)z} S_{i(i+1)z} T_i + \\ + \alpha_{i(i+1)z} S_{i(i+1)z} T_{(i+1)z} + V_i[(j_{xi})^2 \rho_{xi} + (j_{yi})^2 \rho_{yi} + (j_{zi})^2 \rho_{zi}], \end{gathered} \tag{2.45}$$

где T_i – температура текущего объема;

$T_{(i-1)}$ – температура предыдущего объема;

$T_{(i+1)}$ – температура объема, следующего за текущем;

$\alpha_{i(i-1)}$ – коэффициент теплоотдачи между текущим и предыдущими объемами;

$\alpha_{i(i+1)}$ – коэффициент теплоотдачи между текущим и последующими объемами;

$S_{i(i-1)}$ – площадь соприкосновения между текущим и предыдущими объемами;

$S_{i(i+1)}$ – площадь сопрокосновения между текущим и последующими объемами.

Индексы x, y, z в уравнении (2.45) означают,что рассматриваются параметры относительно соответствующих осей X, Y, Z.

Согласно предложенному методу конечных объемов необходимо разбить все исследуемое пространство на выпуклые объемы (сегменты) таким образом, чтобы в исходном состоянии каждый объем включал только одно вещество, для которого можно задать его физические свойства – плотность, теплоемкость, теплопроводность, геометрию, удельное электрическое сопротивление, а также коэффициент теплоотдачи при его контакте с другим веществом.

Исходное разбиение моделируемой системы на объемы соответствует максимальным объемам веществ, состоящим из одного вещества. Упрощенное разбиение аккумулятора можно представить в виде трех элементов – двух электродов и электролита (рисунок 2.9). Считаем, что вокруг рассматриваемой системы поддерживается постоянная температура T_0.

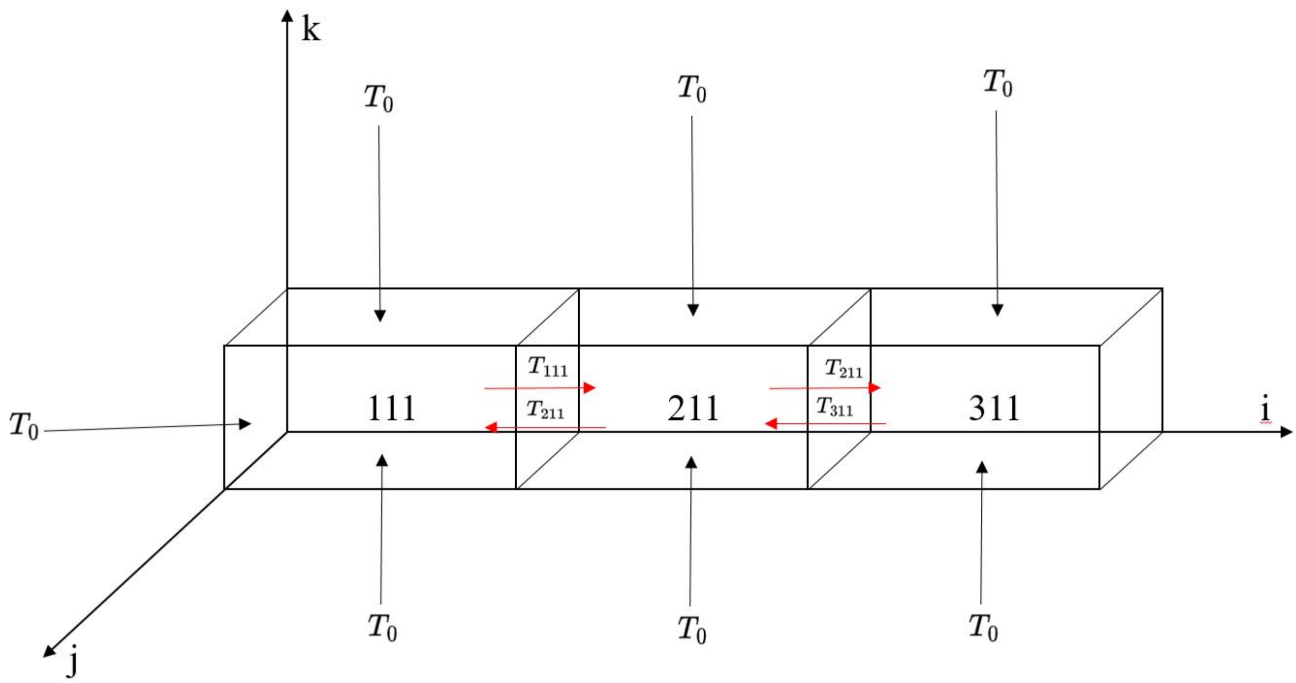

Рисунок 2.9 – Общий вид первого приближения пространственной модели ЛИА

В соответствтвии с уравнением (2.45) для первого сегмента 111 (при $i = 1$, $j = 1$, $k = 1$) уравнение запишется так

$$\begin{gathered}C_{111}\rho_{111}V_{111}\frac{dT_{111}}{dt} = \\ = \alpha_{1(0)11}S_{1(0)11}(T_{(0)11} - T_{111}) - \alpha_{1(2)11}S_{1(2)11}(T_{111} - T_{(2)11}) + \\ + \alpha_{11(0)1}S_{11(0)1}(T_{1(0)1} - T_{111}) - \alpha_{11(0)1}S_{11(0)1}(T_{111} - T_{1(0)1}) + \\ + \alpha_{111(0)}S_{111(0)}(T_{11(0)} - T_{111}) - \alpha_{111(0)}S_{111(0)}(T_{111} - T_{11(0)}).\end{gathered} \tag{2.46}$$

В результате простейших преобразований уравнение (2.46) примет вид:

$$\begin{gathered}C_{111}\rho_{111}V_{111}\frac{dT_{111}}{dt} = \\ = (-\alpha_{1011}S_{1011} - \alpha_{1211}S_{1211} - \alpha_{1101}S_{1101} - \\ - \alpha_{1101}S_{1101} - \alpha_{1110}S_{1110})T_{111} + (\alpha_{1211}S_{1211})T_{211}.\end{gathered} \tag{2.47}$$

При $i = 2$, $j = 1$, $k = 1$

$$\begin{gathered}C_{211}\rho_{211}V_{211}\frac{dT_{211}}{dt} = \\ \alpha_{2(1)11}S_{2(1)11}(T_{(1)11} - T_{211}) - \alpha_{2(3)11}S_{2(3)11}(T_{211} - T_{(3)11}) + \\ + \alpha_{21(0)1}S_{21(0)1}(T_{2(0)1} - T_{211}) - \alpha_{21(2)1}S_{21(2)1}(T_{211} - T_{2(0)1}) + \\ + \alpha_{211(0)}S_{211(0)}(T_{21(0)} - T_{211}) - \alpha_{211(2)}S_{211(2)}(T_{211} - T_{21(0)}),\end{gathered} \tag{2.48}$$

$$\begin{gathered}C_{211}\rho_{211}V_{211}\frac{dT_{211}}{dt} = (\alpha_{2111}S_{2111})T_{111} - (\alpha_{2111}S_{2111} + \\ + \alpha_{2311}S_{2311} + \alpha_{2101}S_{2101} + \alpha_{2121}S_{2121} + \\ + \alpha_{2110}S_{2110} + \alpha_{2112}S_{2112})T_{211} + (\alpha_{2311}S_{2311})T_{311}.\end{gathered} \tag{2.49}$$

При $i = 3, j = 1, k = 1$

$$
\begin{aligned}
&C_{311}\rho_{311}V_{311}\frac{dT_{311}}{dt} = \\
&\alpha_{3(2)11}S_{3(2)11}(T_{(2)11} - T_{311}) - \alpha_{3(0)11}S_{3(0)11}(T_{311} - T_{(0)11}) + \\
&+ \alpha_{31(0)1}S_{31(0)1}(T_{3(0)1} - T_{311}) - \alpha_{31(0)1}S_{31(0)1}(T_{311} - T_{3(0)1}) + \\
&+ \alpha_{311(0)}S_{311(0)}(T_{31(0)} - T_{311}) - \alpha_{311(0)}S_{311(0)}(T_{311} - T_{31(0)}),
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{311}\rho_{311}V_{311}\frac{dT_{311}}{dt} = (\alpha_{3211}S_{3211})T_{211} - (\alpha_{3211}S_{3211} + \\
&+ \alpha_{3011}S_{3011} + \alpha_{3101}S_{3101} + \alpha_{3101}S_{3101} + \\
&+ \alpha_{3110}S_{3110} + \alpha_{3110}S_{3110})T_{311}
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Таким образом, для исходного разбиения имеем математическую модель в виде системы из трех дифференциальных уравнений.

$$
\mathbf{K}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_{111} \\ T_{211} \\ T_{311} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & 0 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{111} \\ T_{211} \\ T_{311} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{0,1} \\ T_{0,2} \\ T_{0,3} \end{pmatrix} T_0 + \mathbf{Q}, \tag{2.52}
$$

где

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix} C_{211}\rho_{211}V_{211} & 0 & 0 \\ 0 & C_{311}\rho_{311}V_{311} & 0 \\ 0 & 0 & C_{311}\rho_{311}V_{311} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{1,1} = -(\alpha_{1(0)11}S_{1(0)11} + \alpha_{1(2)11}S_{1(2)11} + \alpha_{1(1)01}S_{1(1)01} + \alpha_{1(1)10}S_{1(1)10}) \\
&\alpha_{1,2} = \alpha_{1(2)11}S_{1(2)11} \\
&\alpha_{2,1} = \alpha_{2(1)11}S_{2(1)11} \\
&\alpha_{2,2} = -(\alpha_{2(1)11}S_{2(1)11} + \alpha_{2(3)11}S_{2(3)11} + \alpha_{2(1)01}S_{2(1)01} + \\
&\qquad +\alpha_{2(1)21}S_{2(1)21} + \alpha_{2(1)10}S_{2(1)10} + \alpha_{2(1)12}S_{2(1)12}) \\
&\alpha_{2,3} = \alpha_{2(3)11}S_{2(3)11} \\
&\alpha_{3,2} = \alpha_{3(2)11}S_{3(2)11} \\
&\alpha_{3,3} = -(\alpha_{3(2)11}S_{3(2)11} + \alpha_{3(0)11}S_{3(0)11} + \alpha_{3(1)01}S_{3(1)01} + \alpha_{3(1)01}S_{3(1)01} +
\end{aligned}
$$

$$+\alpha_{3(1)10}S_{3(1)10} + \alpha_{3(1)10}S_{3(1)10})$$

$$T_{0,1} = \alpha_{1(0)11}S_{1(0)11} + \alpha_{1(1)01}S_{1(1)01} + \alpha_{1(1)01}S_{1(1)01} + \alpha_{1(1)10}S_{1(1)10} + \alpha_{1(1)10}S_{1(1)10}$$

$$T_{0,2} = \alpha_{2(1)01}S_{2(1)01} + \alpha_{2(1)21}S_{2(1)21} + \alpha_{2(1)10}S_{2(1)10} + \alpha_{2(1)12}S_{2(1)12}$$

$$T_{0,3} = \alpha_{3(0)11}S_{3(0)11} + \alpha_{3(1)01}S_{3(1)01} + \alpha_{3(1)01}S_{3(1)01} + \alpha_{3(1)10}S_{3(1)10} + \alpha_{3(1)10}S_{3(1)10},$$

Q – матрица, характеризующая внешние по отношению к системе источники теплоты.

Видно, что все матрицы, входящие в уравнение (2.52) зависят только от собственных свойств веществ и геометрических размеров конечных объемов (площади, объема). Это дает нам возможность при формировании новых объемов, получая их геометрические размеры (координаты), автоматически генерировать новую систему дифференциальных уравнений, и, кроме того, определять пространственные координаты каждого конечного объема (сегмента). Последнее является предпосылкой возможности избежать численного дифференцирования по пространственным координатам, что может существенно упростить получение решения, используя только дифференцирование по времени уравнений в форме Коши.

2.3.3 Методика расчета распределения тепла в исследуемом объекте

Исходя из рассмотренных гипотез предлагается итерационная методика, в которой для заданной погрешности определения температуры получается аналитическая функция зависимости температуры от четырех параметров (три пространственные координаты и время).

Методика состоит из следующей последовательности действий [83]:

1) задание исходных данных:

– геометрии объекта и окружающей среды для первичного разбиения на условно однородные среды (параметр теплопроводности постоянный);

– погрешности определения температуры во внутренних областях;

– погрешности задания граничной области;

– геометрии источников тепловыделения и распределения температуры внутри них в виде аналитической функции.

2) проверка замкнутости внутренних объемов и соответствия граничной области заданным погрешностям;

3) определение метода деления внутренних объемов (необходимо для формализации процедуры достижения заданной точности расчета);

4) запуск таймера (задаем начальное значение времени);

5) выполнение следующей последовательности действий:

– применение методики расчета для исходной геометрии объектов (получение значения температуры для каждой внутренней области);

– каждый внутренний объем делится (например, пополам) заданным выше методом деления;

– применение методики расчета для новой геометрии объектов (получение значения температур для каждого объема, т. е. для частей исходных объемов);

– проверка условия остановки деления (сравнение значений температур для текущей итерации со значениями температур, полученных на предыдущей итерации с учетом заданной погрешности);

– для объемов, в которых условие остановки деления выполнено, деление прекращается, фиксируются значения температур;

– для объемов, в которых условие остановки деления не выполнено, производится очередное деление;

– применение методики расчета к текущей конфигурации объемов;

– повторение предыдущих действий в цикле до тех пор, пока не выполнится условие остановки деления;

6) если итерационный процесс закончился, то производится приращение по координате времени и возврат к п. 5.;

7) если итерационный процесс не заканчивается по условию остановки деления, тогда вводятся дополнительные ограничения в соответствии с критерием Кнудсена;

8) процесс во времени останавливается либо при достижении установившегося режима (проверка осуществляется по заданному допуску изменения температур на соседних итерациях по времени), либо при заданном времени окончания

расчетов; следует отметить, что первый вариант остановки возможен только при постоянных источниках тепловыделения;

9) проведение аппроксимации полученных значений температур гладкой аналитической функцией.

Описанная методика может быть представлена в виде блок-схемы (рисунок 2.10)

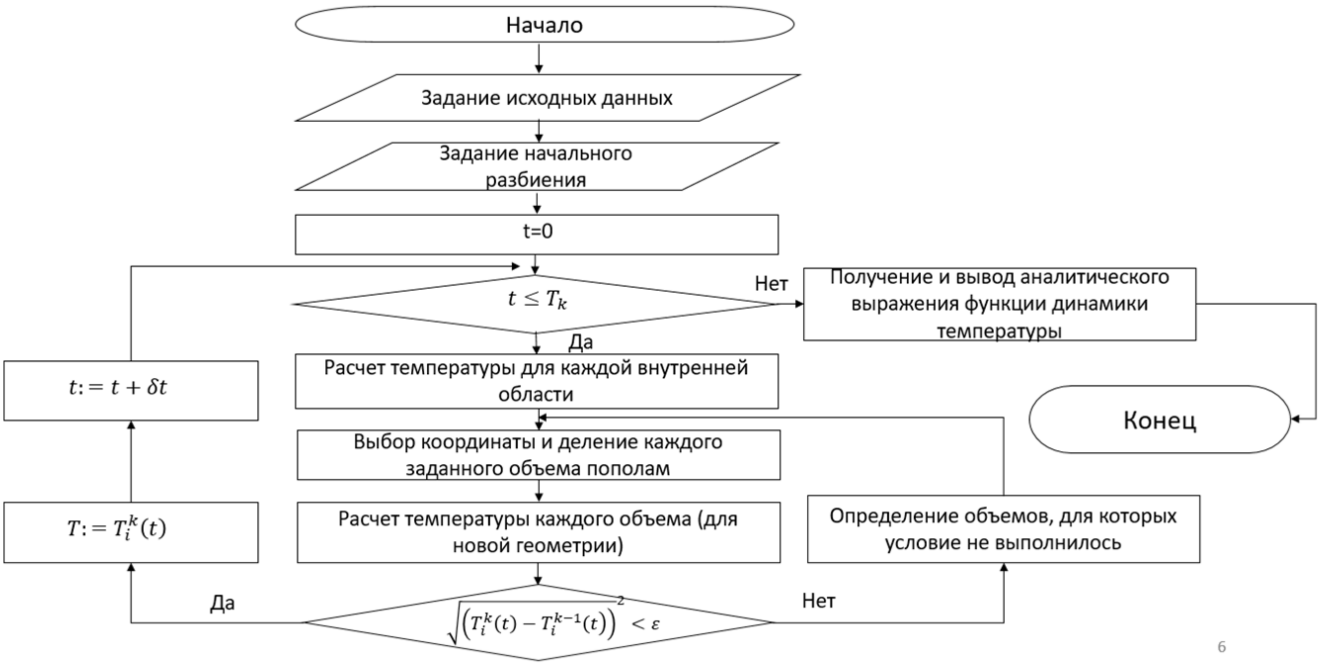

Рисунок 2.10 – Блок-схема алгоритма расчета теплораспределения

2.4 Разработка компьютерной модели тепловых режимов ЛИА на основе модифицированного метода конечных объемов

Для компьютерной реализации описанного метода, первоначальным этапом является задание исходных данных для исследуемого устройства. Согласно разработанной математической модели, описанной в пункте 2.3, исходная геометрия задается системой неравенств. Поскольку для первого приближения пространственной модели ЛИА были выбраны три элемента, то геометрия для такой схемы примет вид (рисунок 2.11).

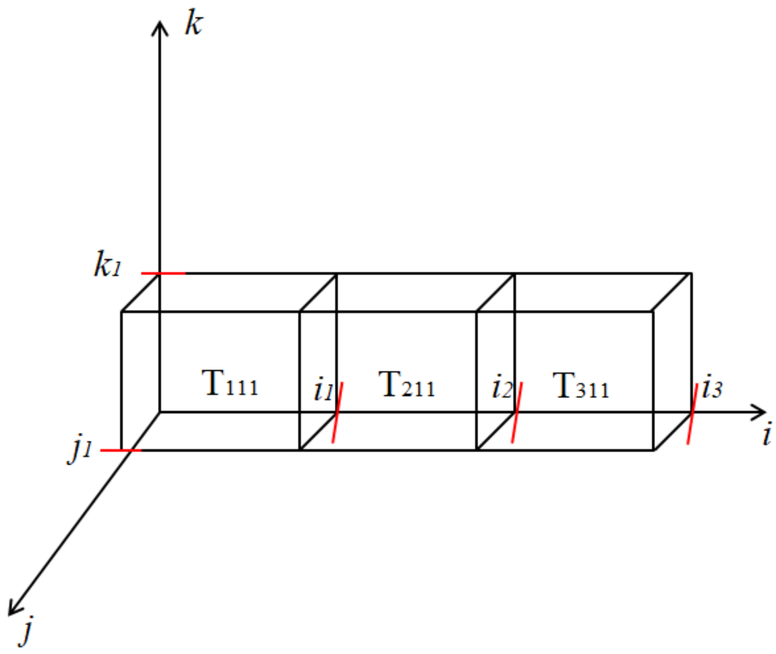

Рисунок 2.11 – Задание геометрии исследуемого объекта

Тогда задание геометрии для первого сегмента T_{111} примет вид:

$$\begin{cases} 0 \le i \le i_1, \\ 0 \le j \le j_1, \\ 0 \le k \le k_1, \end{cases}$$

где i_1, j_1, k_1 – координаты крайних правых точек для первого сегмента в трехмерной системе координат.

Аналогичным образом описываются системы неравенств для оставшихся объемов:

$$\begin{cases} i_1 \le i \le i_2, \\ 0 \le j \le j_1, \\ 0 \le k \le k_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2 \le i \le i_3, \\ 0 \le j \le j_1, \\ 0 \le k \le k_1. \end{cases}$$

Значения координат для каждого сегмента будут получены из заданных значений для длины, высоты и диаметра для каждого сегмента ЛИА. Помимо геометрии, для реализации модифицированного метода конечных объемов, требуется задать физические свойства (плотность, теплоемкость, теплопроводность, коэффициент теплоотдачи и удельное электрическое сопротивление) для каждого из сегментов. Зная физические свойства заданных объемов, можно записать систему линейных дифференциальных уравнений. Решив полученную систему дифференциальных уравнений, получим значение температуры для каждой области.

2.4.1 Задание геометрии исследуемого объекта и начального разбиения

Для компьютерной реализации модифицированного метода конечных объемов используются принципы объектно-ориентированного программирования. Исходя из введенных ограничений для разрабатываемой математической модели, каждая из областей, для которой рассчитывается распределение температуры, будет представлена в виде класса. Для каждого класса будут характерны атрибуты (параметры):

– координаты объема по трем осям (X, Y, Z) – $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, z_{\min}, z_{\max}$,

– плотность материала – ρ,

– коэффициенты теплоемкости – C,

– теплопроводность – λ,

– номер материала – id_m,

– плотность тока по трем осям – j_{ix}, j_{iy}, j_{iz},

– удельное электрическое сопротивление по трем осям – $\rho_{R_{ix}}$, $\rho_{R_{iy}}$, $\rho_{R_{iz}}$.

При моделировании каждого элемента из пространственной модели аккумулятора будут задаваться параметры класса, соответствующие параметрам моделируемого материала. Таким образом формируется первичное разбиение.

В рамках создания первичного разбиения задаются процедуры расчета координат средней точки объекта, массы, объема объекта, которые вычисляются по формулам:

$$N_{\text{ср}} = \begin{cases} x_{\text{ср}} = \dfrac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \\ y_{\text{ср}} = \dfrac{y_{\max} + y_{\min}}{2}, \\ z_{\text{ср}} = \dfrac{z_{\max} + z_{\min}}{2}. \end{cases}$$

$$V = (x_{\max} - x_{\min})(y_{\max} - y_{\min})(z_{\max} - z_{\min}),$$

$$m = \rho V.$$

Помимо основных геометрических параметров и свойств веществ, на этапе задания геометрии задается матрица теплопередач между материалами

$$\text{matrix}_{id_m} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{10} \\ \alpha_{21} & \lambda & \alpha_{23} & \alpha_{20} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \lambda & \alpha_{30} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \lambda \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

где λ – коэффициент теплопроводности (в случае, если происходит обмен теплом между объемами одного вещества $id_{m1} = id_{m2}$);

α_{ij} – коэффициент теплоотдачи (в случае, если происходит теплопередача между объемами разных веществ $id_{m1} \neq id_{m2}$).

2.4.2 Процедура деления объемов

Следующим этапом после задания первичного разбиения, как следует из алгоритма (2.10), является деление всех исходных объемов пополам последовательно по осям X, Y, Z. Процедура деления представлет собой следующую последовательность действий.

1. Задание координаты по которой будет произведено деление ($x = 1$, $y = 2$, $z = 3$).

2. Задание номера объема, для которого будет применена процедура деления.

3. Для выбранного объема расчитывается координата средней точки (в зависимости от выбранной оси для деления) (2.54) после чего исходный объем с заданными параметрами заменяется двумя новыми объемами, обладающими теми же параметрами что и исходный, но имеющий другие координаты по оси деления (рисунок 2.12).

$$x_{1/2} = (x_{\max} + x_{\min})/2 \tag{2.54}$$

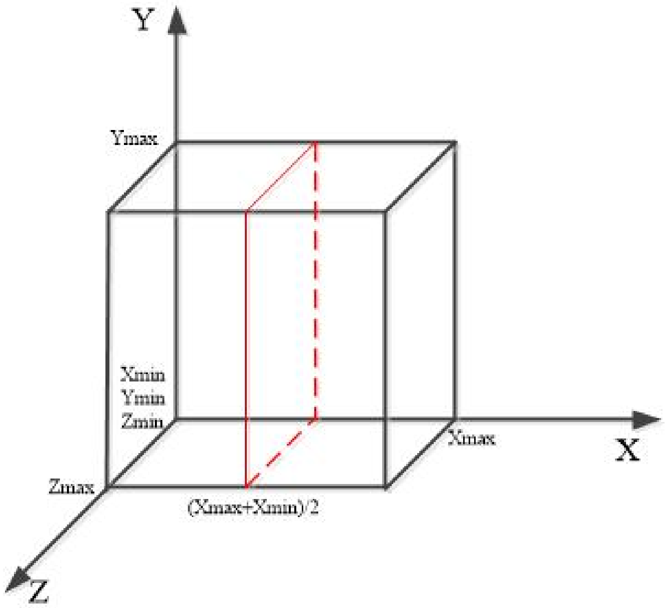

Рисунок 2.12 – Деление объекта по оси X

Исходя из рисунка 2.12 исходный объект, имеющий координаты $x_{\min}, x_{\max}$; $y_{\min}, y_{\max}$; $z_{\min}, z_{\max}$, заменяется на два новых объекта имеющих координаты:

$$Obj_1 = (x_{\min}, (x_{\max} + x_{\min})/2; y_{\min}, y_{\max}; z_{\min}, z_{\max}),$$

$$Obj_2 = ((x_{\max} + x_{\min})/2, x_{\min}; y_{\min}, y_{\max}; z_{\min}, z_{\max}).$$

Благодаря использованию принципов объектно-ориентированного программирования упрощается процедура наследования основных параметров объекта-родителя (плотность, коэффициенты теплоемкости, теплопроводности, плотности токов), изменения коснутся только граничных координат. Таким образом, на месте исходного объекта появятся два новых объекта с новыми границами и координатами, на основе которых будут пересчитаны: средние точки объектов, масса, объем с использованием процедур, созданных при формировании исходного класса.

Помимо этого, новые границы объемов оказывают непосредственное влияние на расчет токов и сопротивлений в объемах, моделирующих электроды. Теплота, выделяющаяся при протекании тока по электродам и электролиту расчитывается по формуле:

$$Q_{xi} = I_i^2 R_i^2,$$

где I_i – ток, протекающий в аккумуляторе;

R_i – электрическое сопротивление.

$$I_x = j_{ix}^2 S_{ZY} \rho_R l_x$$

$$R_x = \rho_R \frac{l_x}{S_{ZY}}.$$

Таким образом, в результате процедуры деления формируется новая геометрия, состоящая из новых объемов, которые обладают новыми свойствами. Описанные выше свойства этих объемов непосредственно влияют на формирование основных матриц дифференциального уравнения (2.52).

2.4.3 Формирование новых свойств взаимодействия объектов

Процесс распределения тепла в исследуемом объекте заключается в передаче тепла между объемами веществ и объемами воздуха. Причем, на сам процесс теплопередачи существенно влияет площадь соприкосновения между соответсвующими объемами. После реализации процедуры деления в новой геометрии могут возникать различные сочетания соприкосновения объемов. На рисунке 2.13 приведены примеры основных случаев.

Особенностью этой процедуры является то, что необходимо рассмотреть все пары из множества объемов системы, при этом для каждой пары объемов для каждой из координат (X, Y, Z) существует 6 вариантов взаимодействия в случае, если грани объектов находятся в одной плоскости:

– 1 и 2 варианты – площадь границы второго объекта находится внутри площади первого объекта (рисунок 2.13 А, Б) или площадь границы первого объекта находятся внутри площади второго объекта;

– 3 и 4 варианты – площади не пересекаются (рисунок 2.13 В, Г);

– 5 и 6 варианты – пересечение площадей, при котором для каждого объекта из пары пересекается только часть площади (рисунок 2.13 Д, Е).

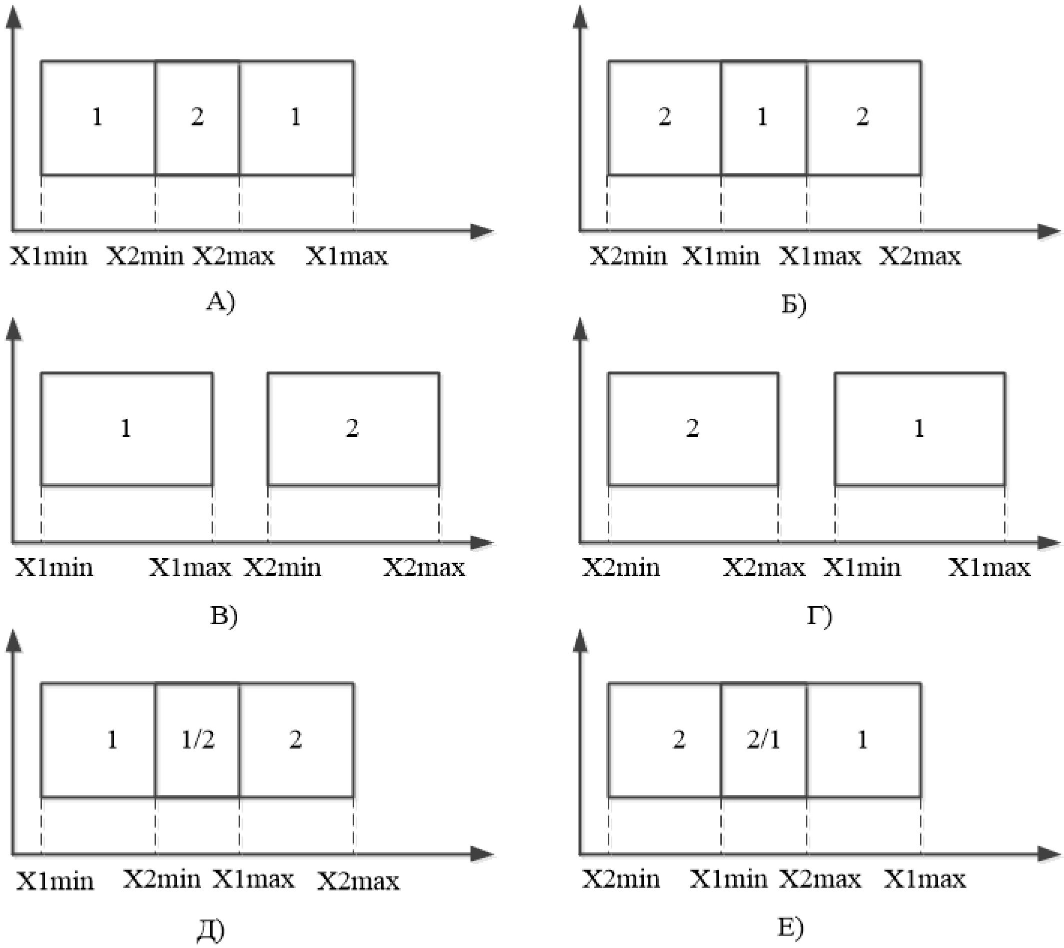

Рисунок 2.13 – Возможные комбинации пересечения граней двух объемов по оси X, находящихся в одной плоскости

Таким образом, исходят из взаимного расположения двух объемов, зная соответствующие координаты, расчитывается площадь соприкосновения, которая является важным параметром в расчете матрицы теплопроводности ($\mathbf{\Lambda}$) и матрицы площадей соприкосновения элемента с объемом воздуха ($\mathbf{T}_{01}$).

На основе этого будет сформирована матрица площадей соприкосновения между парами объемов по каждой из плоскостей (XY, XZ, ZY).

Первоначальным этапом для формирования матрицы площадей соприкосновения двух объемов является проверка условия нахождения этих объемов в одной плоскости и имеющих соприкосновение друг с другом. Для проверки этого условия необходимо сравнить максимальные и минимальные координаты объемов по оси X.

$$x1_{\min} = x2_{\max},$$
$$x1_{\max} = x2_{\min}. \tag{2.55}$$

При выполнении условия (2.55) можно сделать вывод, что поступившие на вход процедуры объемы находятся в одной плоскости и соприкасаются друг с другом.

Для расчета площади соприкосновения объемов необходимо определить координаты площади соприкосновения, исходя из взаимного расположения объемов (рисунок 2.13) и расчитать площадь по формуле:

$$S_{ZY} = (zz_{\max} - zz_{\min})(yy_{\max} - yy_{\min}),$$

где $yy_{\min}$,$yy_{\max}$,$zz_{\min}$,$zz_{\max}$ – координаты площади соприкосновения объемов в плоскости ZY.

Полученные значения площадей формируются в матрицу, в которой количество строк и столбцов ровняется количеству объемов (сегментов), полученному после выполнения процедуры деления. Эту процедуру можно представить следующей последовательностью действий:

– для формирования матрицы объемов задается количество строк – i и количество столбцов – j, равное количеству объемов, полученных в результате деления;

– путем последовательного перебора всех объемов между собой проверяется наличие соприкосновения соответствующих объемов по формуле (2.55);

– если у двух проверяемых объемов имеется соприкосновение, то площадь их соприкосновения заносится в соответсвующий элемент матрицы, т. е. на пересечение строки и столбца, имеющих соответственно номера проверяемых объемов;

– если у двух проверяемых объемов нет соприкосновения, то в матрицу вносится нулевое значение;

– в случае если номер строки совпадает с номером столбца $i = j$, т. е. проверяется наличие соприкосновения объема с самим собой, в матрицу заносится нулевое значение.

Полученная матрица площадей для трех сегментов для граней, параллельных плоскости ZY будет иметь вид:

$$\mathbf{S}_{ZY} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

где S_{11}, S_{22}, S_{33} – нулевые элементы матрицы ввиду того, что площадь соприкосновения сегмента с собой не учитывается в уравнениях;

S_{12} – площадь соприкосновения объема 1 и объема 2.

Аналогичным образом находятся площади и формируются матрицы площадей в плоскостях XY, XZ.

2.4.4 Формирование основных матриц уравнения метода математического прототипирования энергетических процессов

Получив новые свойства объектов, к которым относятся: координаты объектов, границы, объем; новые свойства взаимодействия объектов – площади соприкосновения, будут пересчитываться основные матрицы, входящие в основное уравнение метода математического прототипирования энергетических процессов. К основным матрицам относятся: матрица теплопроводности $\mathbf{\Lambda}$, матрица взаимодействия граней объемов с воздушной средой – $\mathbf{T}_{01}$, матрица внешних источников теплоты (матрица теплоты, выделяемой при протекании токов по аккумуляторной батарее) – $\mathbf{Q}$, матрица $\mathbf{K}$ – диагональная матрица, элементами которой являются произведения теплоемкостей на полотности и объемы сегментов. В зависимости от полученной геометрии эти матрицы будут пересчитываться каждый раз после проведеня процедуры деления, следовательно они зависят от свойств новых объектов и от свойств взаимодействия новых объектов.

2.4.4.1 Формирование матрицы теплопроводности

Процедура формирования матрицы теплопроводности может быть представлена следующим алгоритмом (рисунок 2.14):

– задается матрица с количеством строк и столбов равным количеству объемов, составляющих геометрию исследуемого объекта;

– производится последовательная проверка всех объемов геометрии между собой на наличие соприкосновения по каждой плоскости (XY, ZY, YZ), используя заранее сформированные матрицы площадей;

– если для проверяемых объемов имеется соприкосновение, то значение площади, взятое из матрицы площадей, умножается на соответсвующее значение матрицы теплоотдачи-теплопроводности;

– полученное значение со знаком минус вносится в матрицу;

– если соприкосновения объектов нет, то в формируемую матрицу заносится значение нуль.

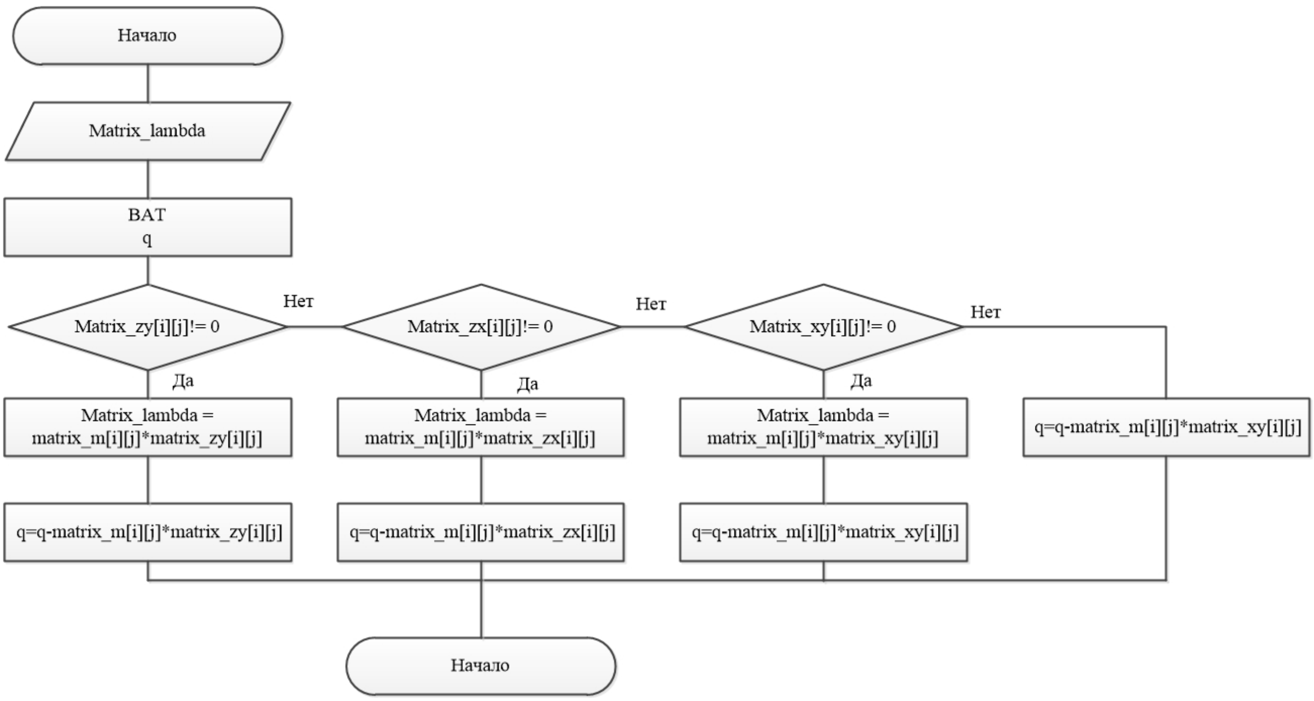

Рисунок 2.14 – Алгоритм формирования матрицы теплопроводности

2.4.4.2 Формирование матрицы взаимодействия объемов с воздушной средой

Формирование матрицы взаимодействия объемов с воздушной средой представляет собой произведение суммарной площади соприкосновения каждого объема с окружающей средой (с границей исследуемой области), умноженной на коэффициент теплопередачи. Для реализации этой процедуры подготовительным этапом является определение максимальных и минимальных координат по каждой оси границ исследуемого объема. Далее, путем перебора всех объемов, составляющих геометрию после деления, проводится проверка: граничит ли проверяемый объем с внешней средой.

2.4.4.3 Формирование матрицы теплоты

При формировании класса, необходимого для задания исходной геометрии исследуемого объекта одним из параметров является плотность тока по каждой из трех координат – j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}. Исходя из заданных параметров и координат объемов, формирующих геометрию, формируются матрицы токов по трем осям – X, Y, Z с использованием формул (2.57), (2.58):

$$R_x = \rho_R \frac{l_x}{S_{ZY}}, \tag{2.57}$$

$$I_x = j_{ix}^2 S_{ZY} \rho_R l_x. \tag{2.58}$$

Для каждого объема геометрии по представленным формулам формируются три матрицы токов – matrix_{I_x}, matrix_{I_y}, matrix_{I_z},. Таким образом, формируемая матрица теплоты получается путем сложения трех матриц токов.

2.4.4.4 Формирование матрицы K

K представляет собой матрицу, каждый элемент которой является произведением объема сегмента на плотность материала данного сегмента. Алгоритм формирования уравнения (2.52) и пересчета матриц представлен на рис. 2.15. При этом уравнение (2.52) представляется в виде разностных уравнений численного интегрирования методом Эйлера:

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_{i-1} + \mathbf{K}^{-1}\left[\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}_{i-1} + \mathbf{T}_{01}\mathbf{T}_0 + \mathbf{Q}\right]\Delta t, \tag{2.59}$$

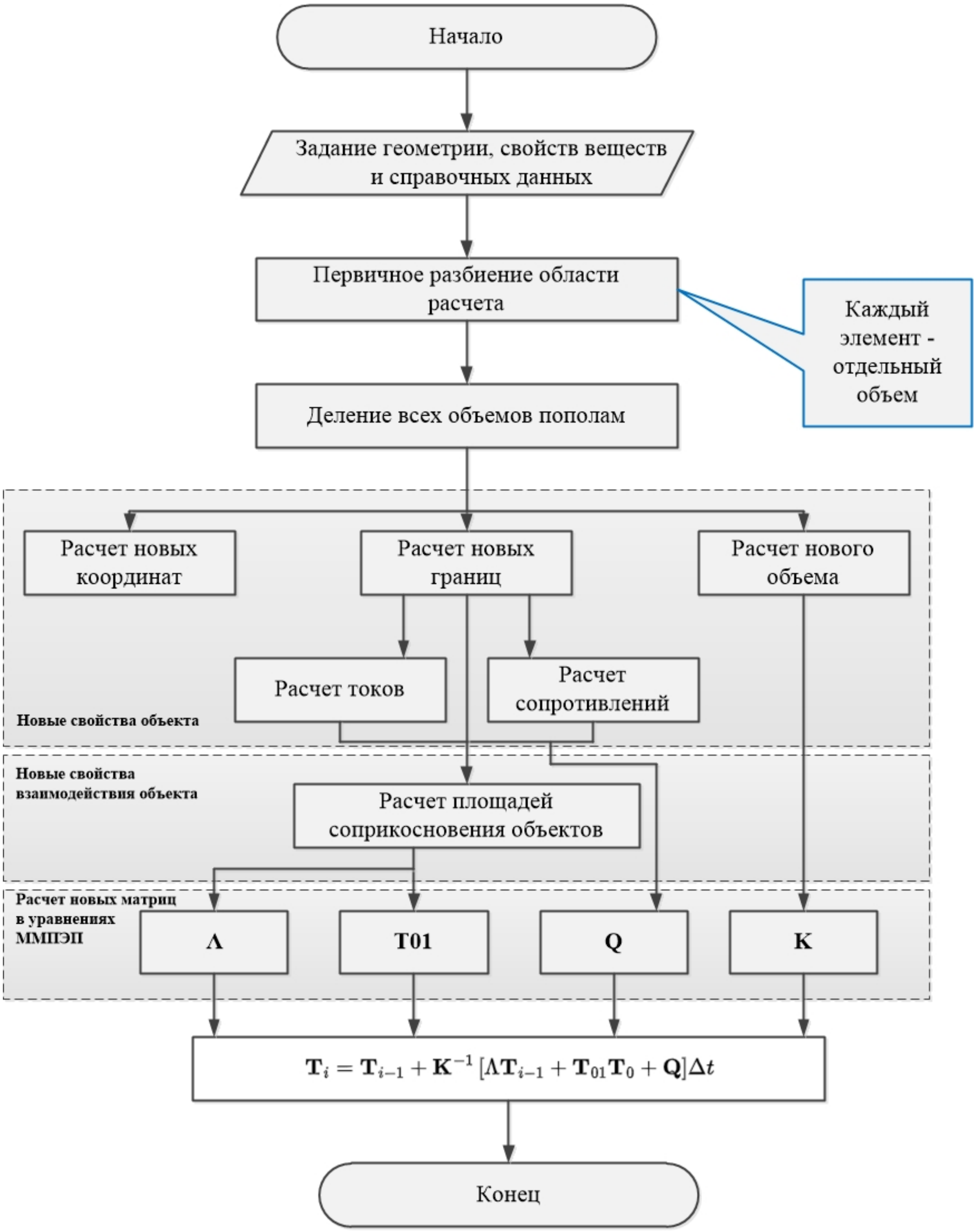

Рисунок 2.15 – Алгоритм автоматического формирования уравнениий теплопроводности в модифицированном методе конечных объемов

2.4.5 Программная реализация модифицированного метода конечных объемов

Для программной реализации модифицированного метода конечных объемов был использован высокоуровневый, объектно-ориентированный язык программирования Python. В качестве исследуемого объекта (аккумулятора) использовалась упрощенная модель аккумулятора, состаящая из трех объемов, моделирующих электроды и электролит. Дополнительными объемами была смоделирована воздушная среда, вокруг аккумулятора. Упрощенная пространсвенная модель представлена на рисунке 2.16.

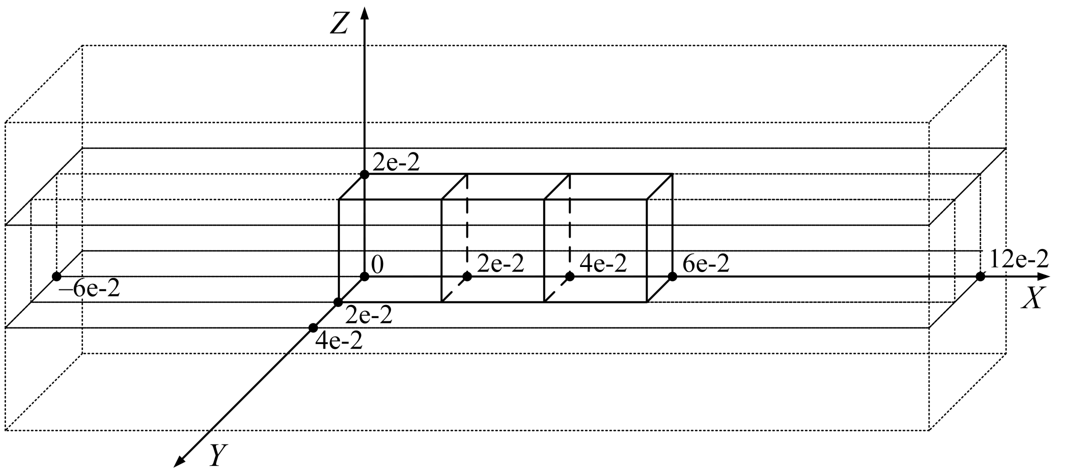

Рисунок 2.16 – Упрощенная пространственная схема для расчета температурного поля литийионного аккумулятора

Первым этапом при реализации модифицированного метода конечных объемов является задание геометрии – координат объемов, моделирующих основные элементы аккумулятора и объемы воздуха вокруг аккумулятора (таблица 2.2):

Для заданных физических свойств объектов (таблица 2.3) получены результаты моделирования (рисунки 2.17–2.23) для разных режимов работы (токов разряда от 5 до 20 А) и внешних воздействиях (температура окружающей среды от –40 до +40 °C). В зависимости от протекающих токов параметры, задающие плотности токов (j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}), подлежат изменению. Графики построены для распределения поля температур вдоль оси, параллельной оси X. Программа, реализующая указанную методику представлена в Приложении 1.

Результаты моделирования показали адекватность моделей теплового поля аккумулятора, что подтверждает работоспособность предложенного модифицированного метода конечных объемов, основанного на применении метода математического прототипирования энергетических процессов.

Таблица 2.2 – Геометрические параметры объектов

	x_{min}	x_{max}	y_{min}	y_{max}	z_{min}	z_{max}
Электрод 1	0	0,02	0	0,02	0	0,02
Электролит	0	0,02	0	0,02	0	0,02
Электрод 2	0	0,02	0	0,02	0	0,02
Воздух 1	–0,06	0	0	0,02	0	0 0,02
Воздух 2	0,06	0,12	0	0,02	0	0,02
Воздух 3	–0,06	0,12	0	0,02	0,02	0,04
Воздух 4	–0,06	0,12	0	0,02	–0,02	0
Воздух 5	–0,06	0,12	–0,02	0	–0,02	0,04
Воздух 6	–0,06	0,12	0,02	0,04	–0,02	0,04

Таблица 2.3 – Физические свойства объектов

	ρ	λ	C	id_m	j_{ix}	j_{iy}	j_{iz}
Электрод 1	534	71	3580	0	0	0	12500
Электролит	1,1	10	1500	1	12500	0	0
Электрод 2	2270	200	840	2	0	0,12	12500
Воздух 1	1,2	0,26	1	3	0	0	0
Воздух 2	1,2	0,26	1	3	0	0	0
Воздух 3	1,2	0,26	1	3	0	0	0
Воздух 4	1,2	0,26	1	3	0	0	0
Воздух 5	1,2	0,26	1	3	0	0	0
Воздух 6	1,2	0,26	1	3	0	0	0

Семейство кривых распределения температуры для исходной геометрии аккумулятора для различных значений окружающий условий (начальной температуры от $-40°$C до $+40°$C) и режимов работы (токов разряда/заряда от 5 до 20 А) представлено на рисунке 2.17

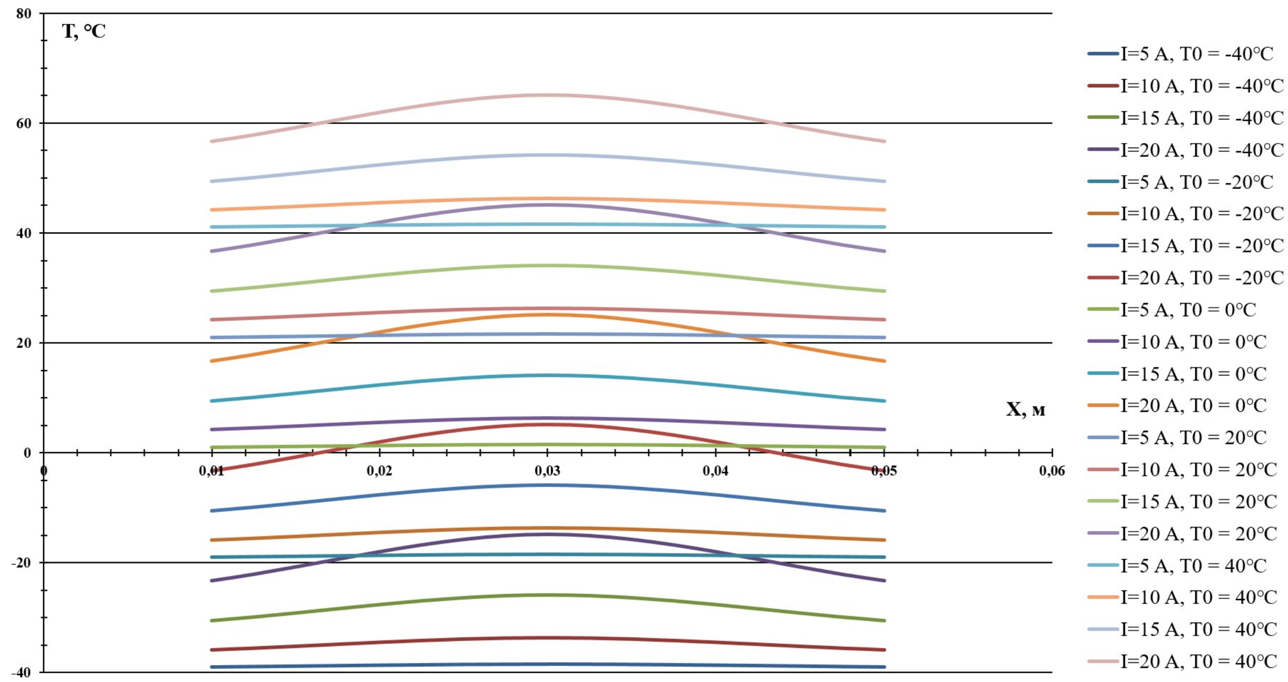

Рисунок 2.17 – Семейство кривых распределения температуры для исходной геометрии аккумулятора

Семейство кривых распределения температуры для левого (на рисунке 2.18 выделено красным) объема воздуха с координатами $X = (-0{,}06; 0)$, $Y = (0; 0{,}02)$, $Z = (0; 0{,}02)$ после ряда процедур его деления по оси X для различных значений окружающий условий (начальной температуры от –40 до +40 °С) и режимов работы (токов разряда/заряда от 5 до 20 А) представлено на рисунке 2.19.

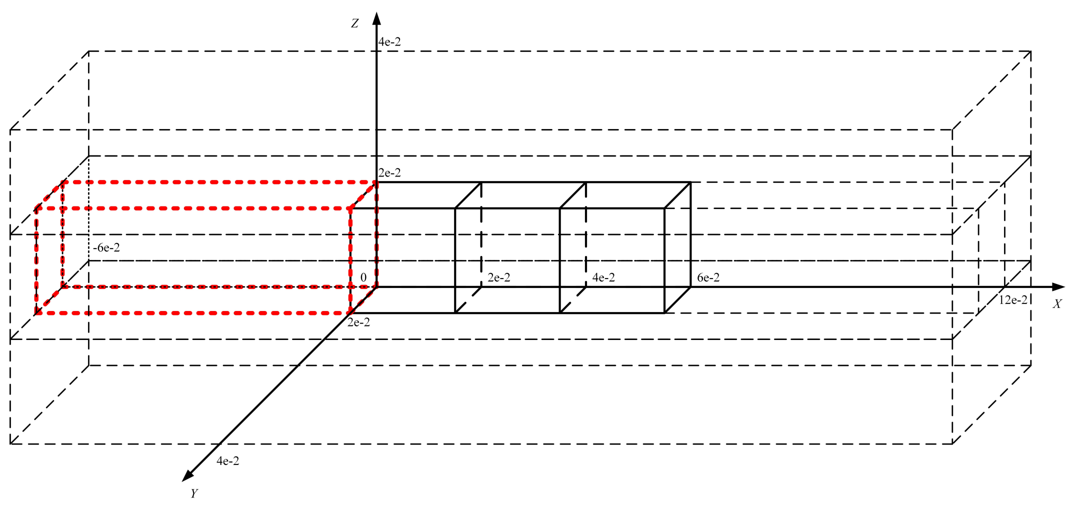

Рисунок 2.18 – Схема объекта моделирования

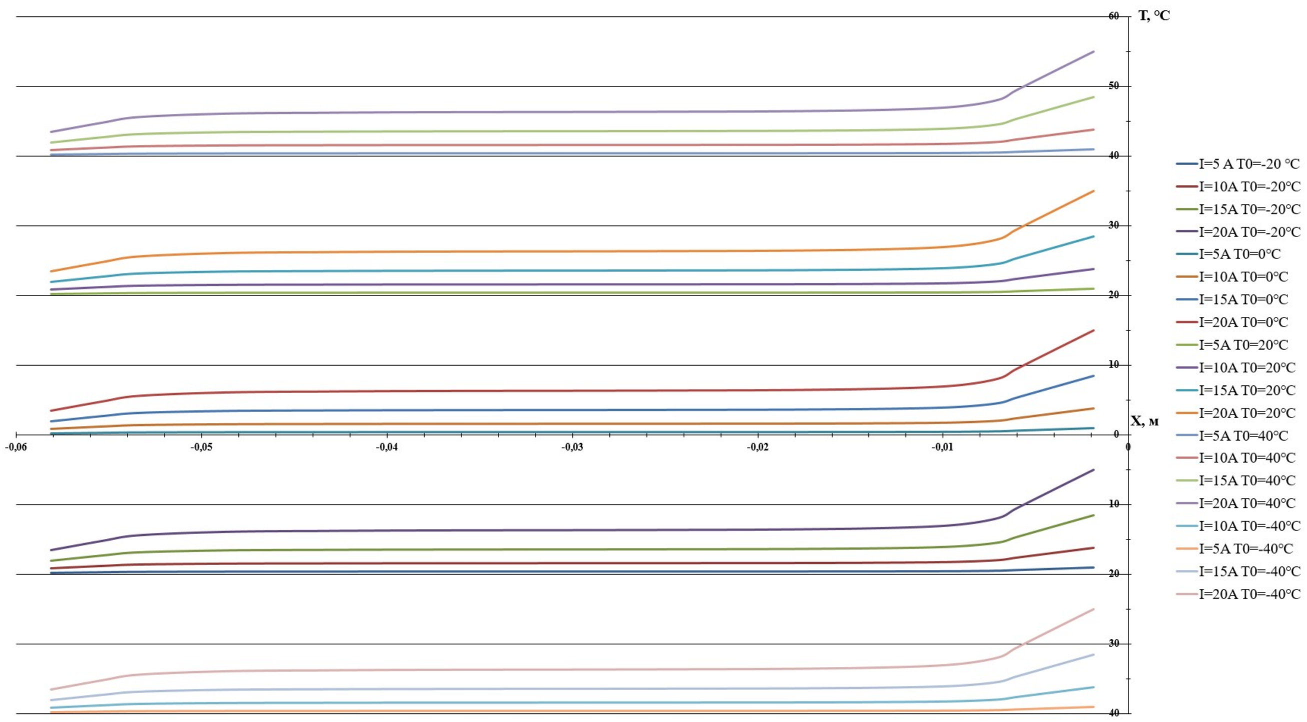

Рисунок 2.19 – Семейство кривых распределения температуры для левого объема воздуха после его деления по оси X

Семейство кривых распределения температуры для верхнего (на рисунке 2.20 выделено красным) объема воздуха с координатами $X = (-0.06; 0{,}12)$, $Y = (0; 0{,}02)$, $Z = (0{,}02; 0{,}04)$ после ряда процедур его деления по оси X для различных значений окружающий условий (начальной температуры от –40 до +40 °C) и режимов работы (токов разряда/заряда от 5 до 20 А) представлено на рисунке 2.21.

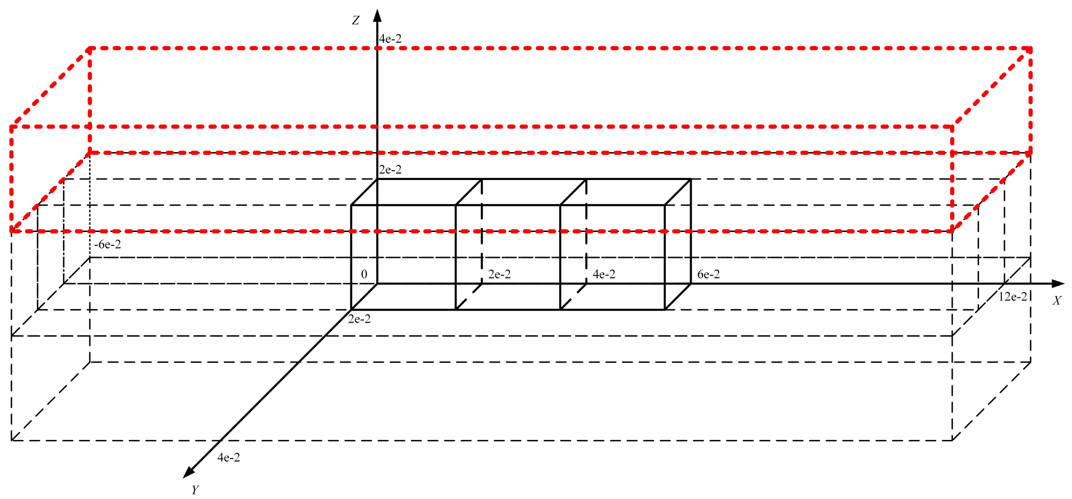

Рисунок 2.20 – Схема объекта моделирования

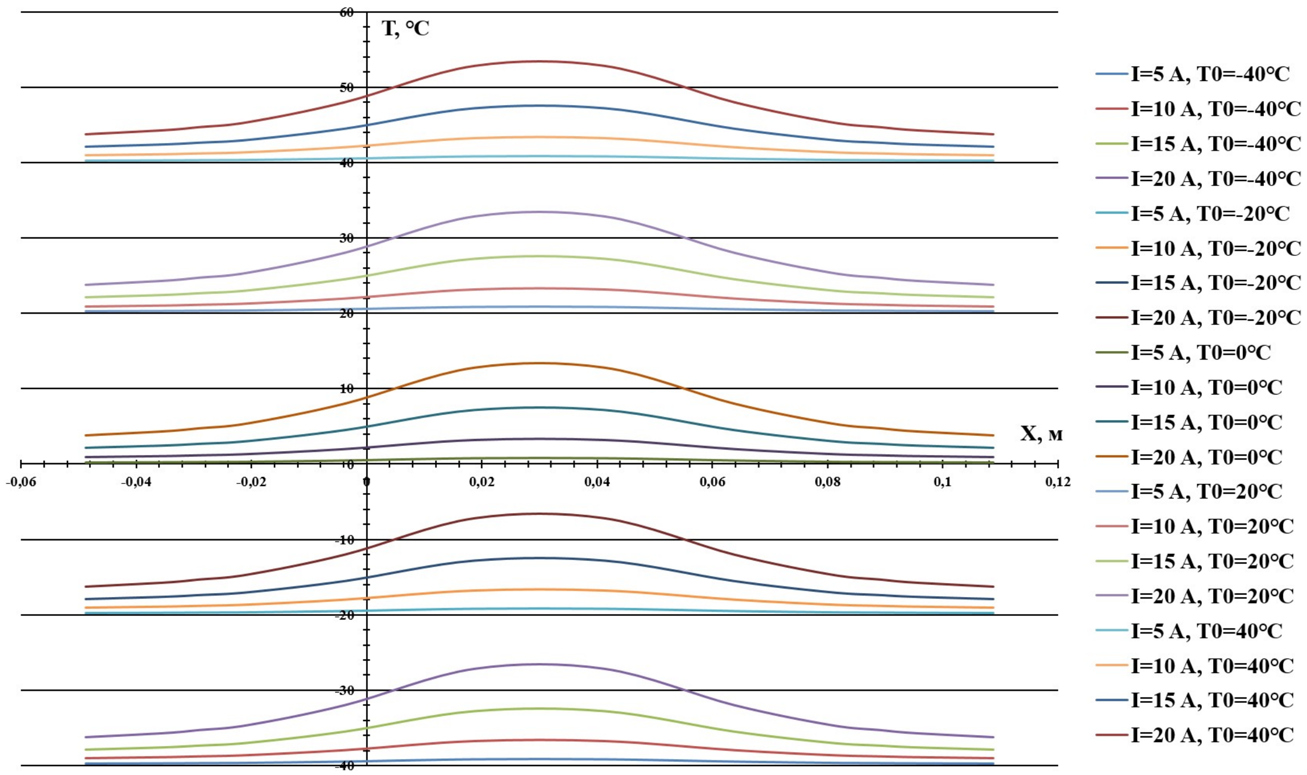

Рисунок 2.21 – Семейство кривых распределения температуры для верхного объема воздуха после его деления

Семейство кривых распределения температуры для верхнего (на рисунке 2.22 выделено красным) объема воздуха с координатами $X = (-0{,}06; 0{,}12)$, $Y = (0{,}02; 0{,}04)$, $Z = (0; 0{,}02)$ после ряда процедур его деления по оси X для различных значений окружающий условий (начальной температуры от –40 до +40 °C) и режимов работы (токов разряда/заряда от 5 до 20 А) представлено на рисунке 2.23.

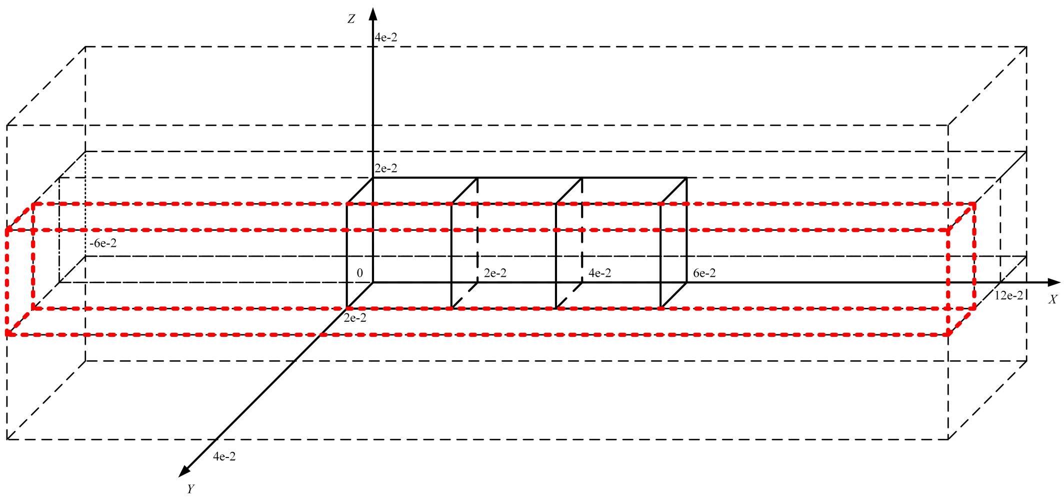

Рисунок 2.22 – Схема объекта моделирования

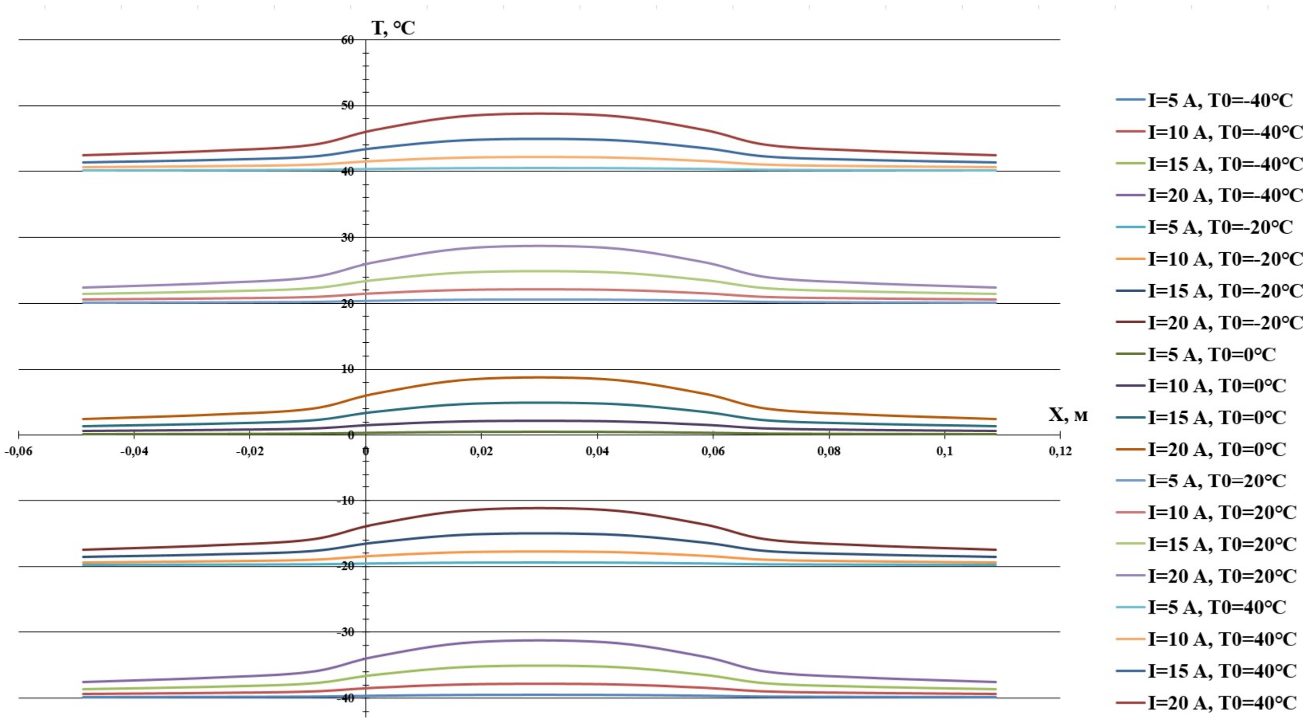

Рисунок 2.23 – Семейство кривых распределения температуры для переднего объема воздуха после его деления

2.5 Выводы по второй главе

Во второй главе диссертации:

– рассмотрены основные численные методы, используемые для решения уравнения теплопроводности и проведен их сравнительный анализ;

– разработана математическая модель литийионного аккумулятора, сформулированы основные ограничения, описаны уравнения для формирования геометрии исследуемого объекта;

– разработан модифицированный метод конечных объемов;

– разработана методика формирования уравнений теплопроводности для реализации метода математичского прототипирования энергетических процессов;

– представлена методика расчета распределения тепла в ЛИА модифицированным методом конечных объемов с использованием метода математического прототипирования энергетических процессов;

– представлены результаты компьютерной реализации модифицированного метода конечных объемов.

Результаты моделирования для разных режимов работы (токов разряда от 5 до 20 А) и внешних воздействиях (температура окружающей среды от –40 до +40 °С) показали принципиальную адекватность полученных при моделировании теплового поля аккумулятора, что подтверждает работоспособность предложенного модифицированного метода конечных объемов, основанного на применении метода математического прототипирования энергетических процессов.

3 Метод диагностирования предаварийных тепловых режимов работы литийионного аккумулятора

3.1 Обоснование критерия диагностирования ЛИА – выбор диагностических признаков предаварийных режимов

При разработке метода диагностирования состояния ЛИА по тепловым портретам в качестве критерия диагностирования предлагается выбрать **интервал времени Δt, за который внутренняя температура электролита $T_{контр}$ аккумулятора (самый нагетый участок) достигнет критического значения**. Определяя значачение этого критерия в режиме реального времени можно выявить критическое состояние аккумулятора (ситуация когда температура гарантированно станет больше критической), либо выявить предаварийное состояние (приближение температуры к критическому значению).

Для каждого типа аккумуляторных батарей, используемых на борту ВС, известно критическое значение температуры, при достижении которой возникает аварийный режим работы устройства. Однако, средства измерения температуры аккумуляторов и аккумуляторных батарей не могут быть расположены внутри аккумуляторов, где температура максимальна. Исходя из этого, важным является получение зависимости температуры в контролируемой точке (внутренняя температура) от измеряемой (на корпусе аккумулятора). Такие зависимости можно получить в аналитическом виде, используя в качестве эталона математическую модель на основе решения уравнений теплопроводности с использованием модифицированного метода конечных объемов.

В предлагаемом методе диагностирования предаварийного состояния аккумуляторных батарей будет производится измерение температуры на поверхности устройства $T_{изм}$ с помощью точечных датчиков температуры. Для повышения точности определения контролируемой температуры установку температурных датчиков необходимо осуществлять в тех местах, где температура на поверхности наибольшая. Наиболее нагретые области можно определить на основании математической модели, а также экспериментальным путем – с помощью тепловизора.

Значение температур в местах установки датчиков будет определяться в каждый момент времени.

Зная аналитическую функцию распределения скалярного поля температур внутри аккумулятора, которая получена с использованием модифицированного метода конечных объемов, можно, используя измеренную температуру в определенный момент времени t_i, пересчитать контролируемую температуру внутри аккумулятора в этот же момент времени t_i (рисунок 3.1). Таким образом, зная аналитическую функцию распределения температуры можно расчитать температуру в любой момент времени. Исходя из того, что критическое значение температуры, при котором возникает аварийный режим работы аккумулятора известно, можно по аналитической функции расчитать через какой промежуток времени внутренняя температура устройства достигнет критического значения $\Delta t_{\text{кр}}$, то есть получить значение критерия.

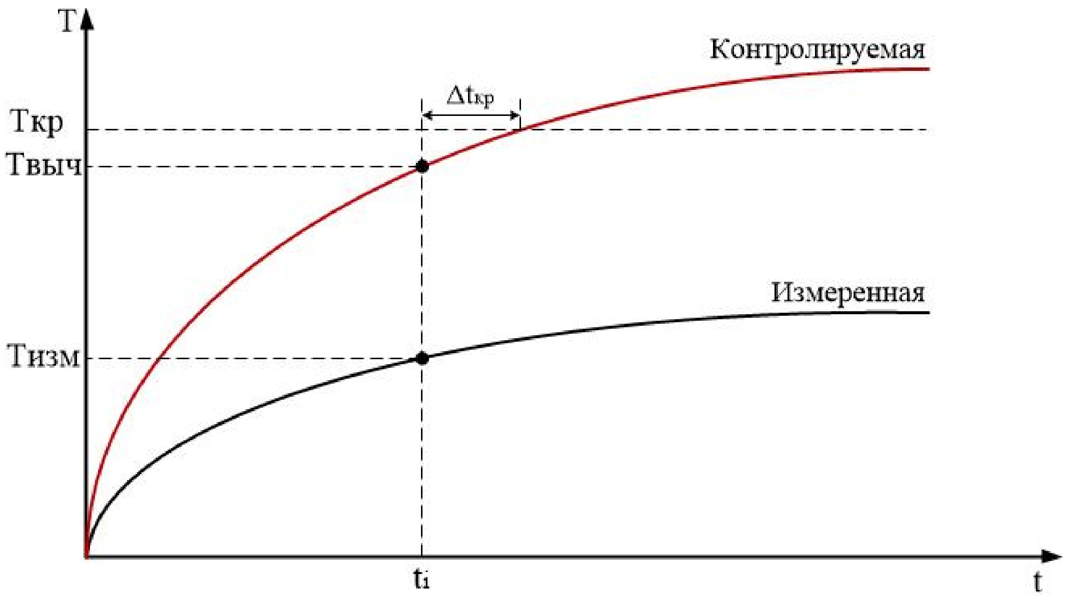

Рисунок 3.1 – Диагностика и прогноз теплового состояния аккумулятора

$\Delta t_{\text{кр}}$ – это время, за которое необходимо принять управленческое решение об отключении аккумулятора, и включает в себя непосредственно время расчета, время на передачу информации по цифровому каналу связи, а также время срабатывания коммутационного устройства. Следует отметить, что Δt зависит от нескольких параметров – момента времени измерения, измеренной температуры, тока разряда, температуры окружающей среды и непосредственно критического значения самого нагретого элемента. Аналитическая функция скалярного поля температур, параметрами которой и являются указанные величины, позволяет рассчитать выбранный критерий.

3.2 Получение упрощенной аналитической тепловой модели ЛИА для формирования теплового цифрового портрета

Упрощенная аналитическая тепловая модель ЛИА формируется путем аппроксимации данных, полученных в результате расчета распределения температуры внутри и вокруг аккумулятора. В качестве функционального базиса предложено использовать сигмоидные функции.

Сигмоидная функция является нелинейной функцией, принимающей любое вещественное число и преобразующая его в диапазоне от 0 до 1. Математическое выражение сигмоидной функции представляется формулой:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

Аппроксимацию с использованием сигмоидных функций рассмотрим на примере графика распределения температуры вдоль оси X для объема воздуха, расположенного в верхней части рассматриваемой области (рисунок 2.20) с координатами $X = (-0{,}06; 0{,}12)$, $Y = (0; 0{,}02)$, $Z = (0{,}02; 0{,}04)$ при начальной температуре $T_0 = 20°\mathrm{C}$ и токе $I = 20\,\mathrm{A}$.

Для проведения аппроксимации графика распределения температуры с использованием сигмоидных функций, необходимо исходный график температуры разбить на подобласти, в каждой из которых функция будет монотонной и иметь одну точку перегиба, как показано на рисунке 3.2.

Далее для каждой области необходимо, варьируя соотвествующие коэффициенты, подобрать такую сигмоидную функцию, для которой погрешность аппроксимации будет минимальна. На рисунке 3.3 показан пример выбора сигмоидной функции для аппроксимации первого участка исходного графика.

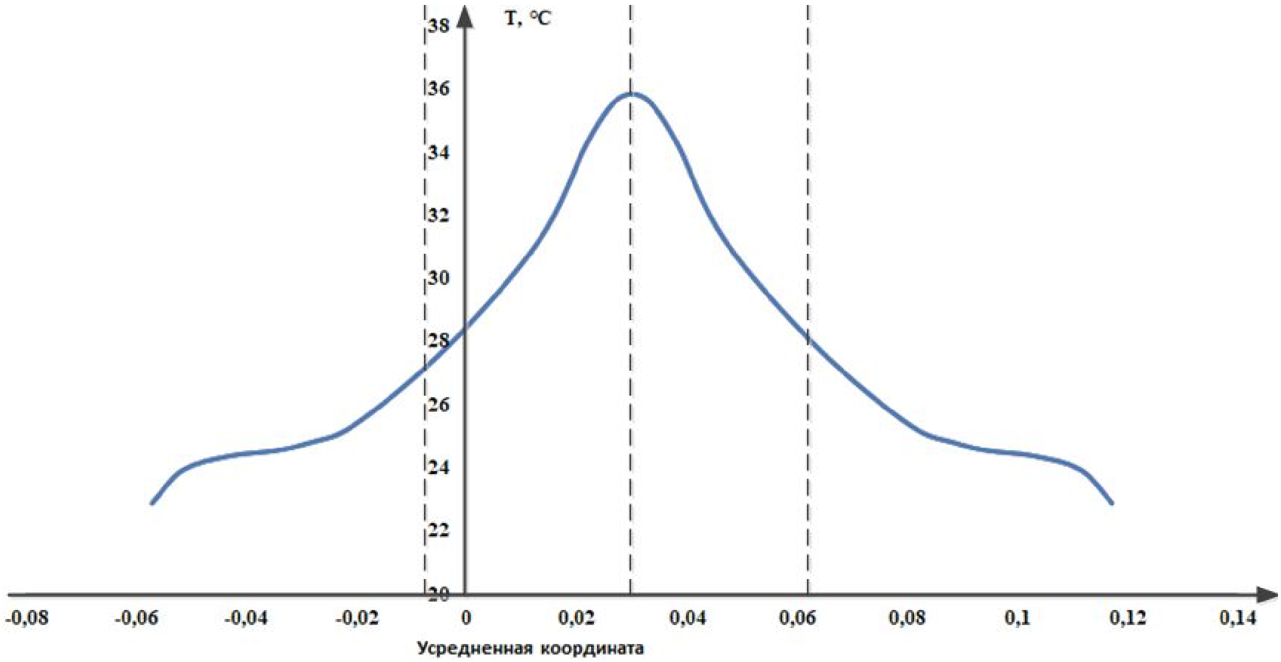

Рисунок 3.2 – Определение областей для аппроксимации сигмоидными функциями

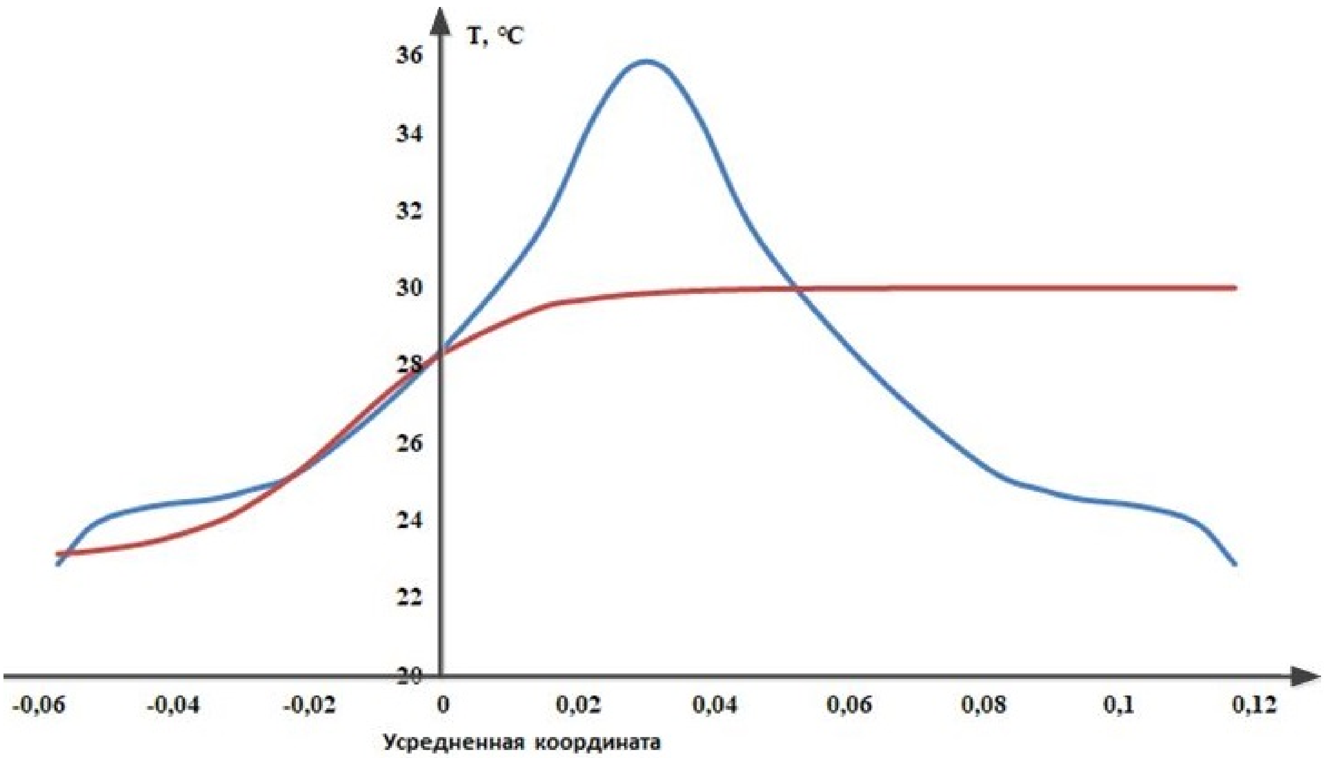

Рисунок 3.3 – Аппроксимация 1-го участка графика температуры с использованием сигмоидной функции

Функция, описывающая сигмоидную функция примет вид:

$$\sigma(x) = \frac{7}{1 + \exp(-90x - 1{,}2)} + 23.$$

Выбрав подобным образом коэффициенты сигмоидных функций для каждой заданной подобласти, получим искомую функцию аппроксимации графика распределения температуры (рисунок 3.4).

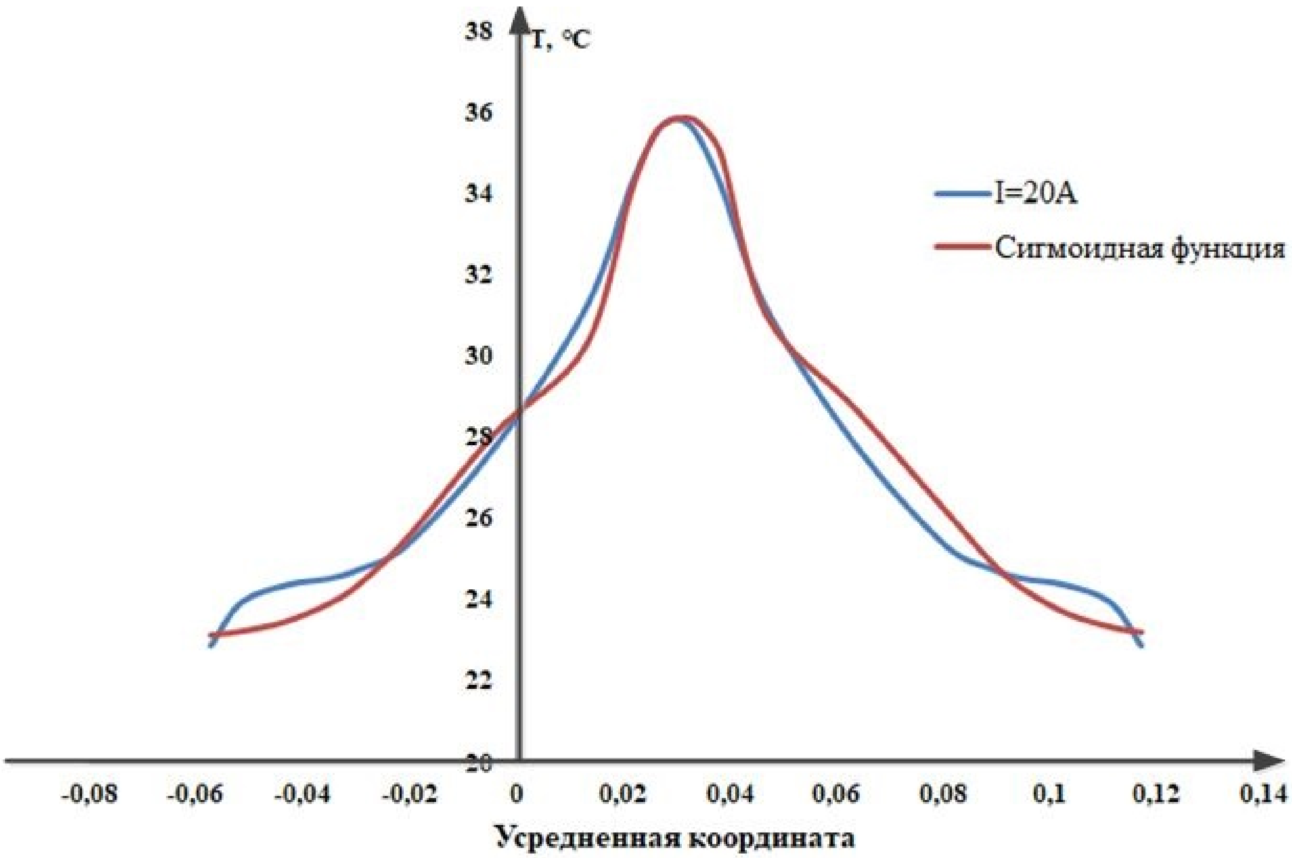

Рисунок 3.4 – Аппроксимация исходного графика распределения температуры

Математическая функция аппроксимации для графика распределения температур при $I = 20$ А:

$$T(x) = \frac{7{,}3}{1 + \exp(-90x - 1{,}2)} + \frac{6}{1 + \exp(-350x + 6{,}8)} - \\ - \frac{7{,}3}{1 + \exp(-90x + 7)} - \frac{6}{1 + \exp(-350x + 15)} + 23.$$

Аналогичным образом получаются функции аппроксимации графиков распределений температур для токов разряда 5, 10 и 15 А.

При $I = 15$ А:

$$T(x) = \frac{4{,}6}{1+\exp(-90x-1{,}2)} + \frac{3}{1+\exp(-350x+6{,}8)} -$$
$$-\frac{4{,}6}{1+\exp(-90x+7)} - \frac{3}{1+\exp(-350x+15)} + 21{,}5.$$

При $I = 10$ А:

$$T(x) = \frac{2{,}05}{1+\exp(-110x-1{,}2)} + \frac{1}{1+\exp(-350x+6{,}8)} -$$
$$-\frac{2{,}05}{1+\exp(-110x+7)} - \frac{1}{1+\exp(-350x+15)} + 21.$$

При $I = 5$ А:

$$T(x) = \frac{0{,}8}{1+\exp(-120x-1{,}2)} + \frac{0{,}1}{1+\exp(-450x+6{,}8)} -$$
$$-\frac{0{,}8}{1+\exp(-120x+7)} - \frac{0{,}1}{1+\exp(-450x+15)} + 20{,}2.$$

Таким образом, графики функций аппроксимации распределения температур для различных режимов работы аккумулятора (токов разряда) приведены на рисунке 3.5.

Полученные функции позволяют найти распределение температуры при конкретных значениях токов, однако для дальнейшего использования функции для реализации метода диагностирования, необходимо иметь возможность рассчитать функцию для любого значения тока. С этой целью была проведена замена коэффициентов, которые выражены константами в виде функциональной зависимости

$$T(x) = \frac{A_1}{1+\exp(-B_1x-1{,}2)} + \frac{A_2}{1+\exp(-B_2x+6{,}8)} -$$
$$-\frac{A_3}{1+\exp(-B_3x+7)} - \frac{A_4}{1+\exp(-B_4x+15)} + C,$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – коэффициенты числителя каждого из слагаемых;

B_1, B_2, B_3, B_4 – коэффициенты перед координатой x;

C – постоянный коэффициент.

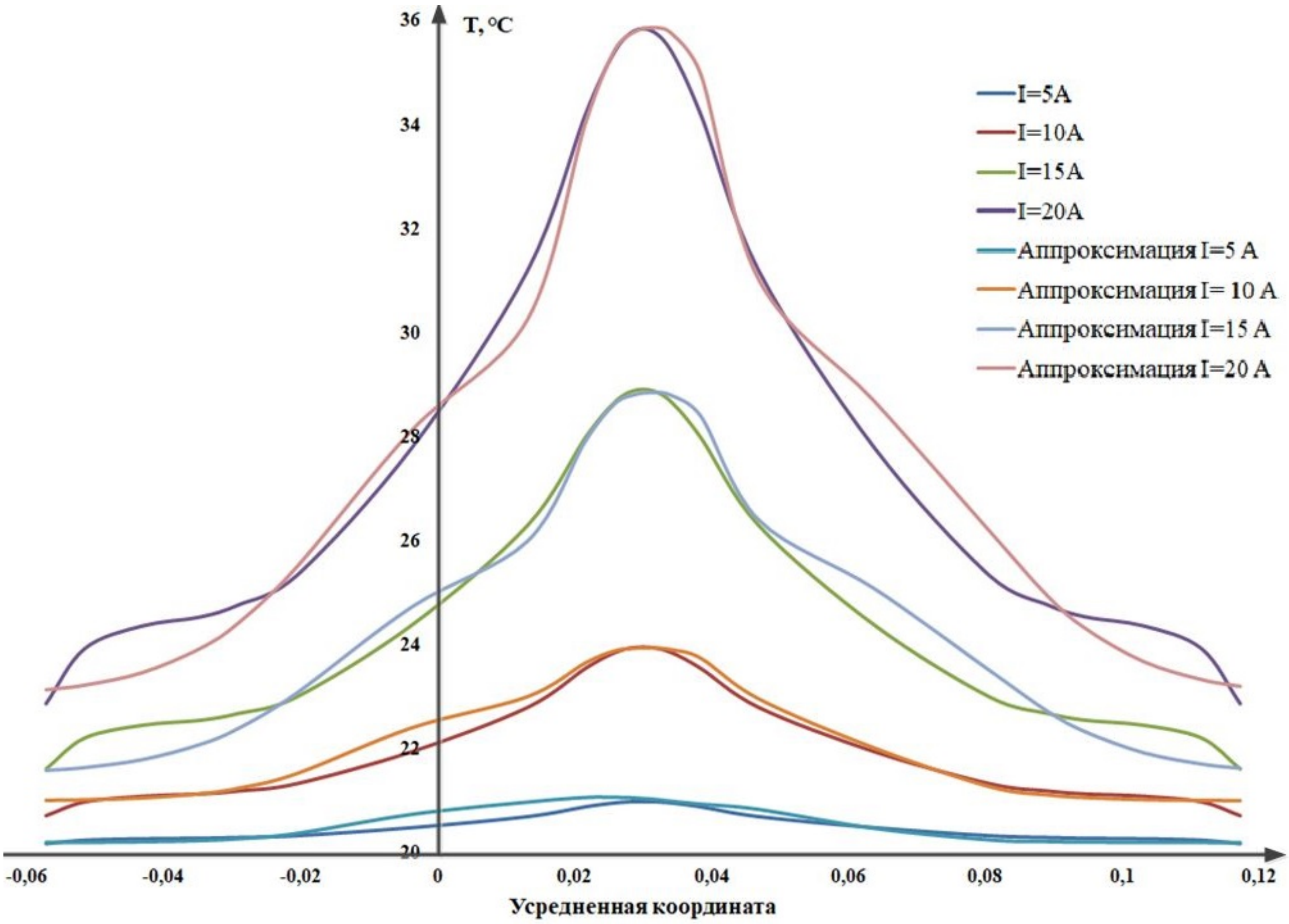

Рисунок 3.5 – Аппроксимация графиков температуры сигмоидными функциями при $I = 5$ А, $I = 10$ А, $I = 15$ А, $I = 20$ А

Нахождение искомой обобщенной функциональной зависимости проведена аппроксимация коэффициентов сигмоидных функций в зависимости от тока разряда. Для этого сформирована таблица 3.1 исходных значений коэффициентов.

Таблица 3.1 – Исходные данные коэффициентов сигмоидных функций

I, A	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4	C
5	0,8	0,1	0,8	0,1	120	450	120	450	20,2
10	2,05	1	2,05	1	110	350	110	350	21
15	4,6	3	4,6	3	90	350	90	350	21,5
20	7,3	6	7,3	6	90	350	90	350	23

Для каждого коэффициента построим график зависимости от тока разряда, с помощью автоматической функции подбора функции аппроксимации MS Excel, выбрана необходимая функция тренда и получено ее уравнение (рисунок 3.6)

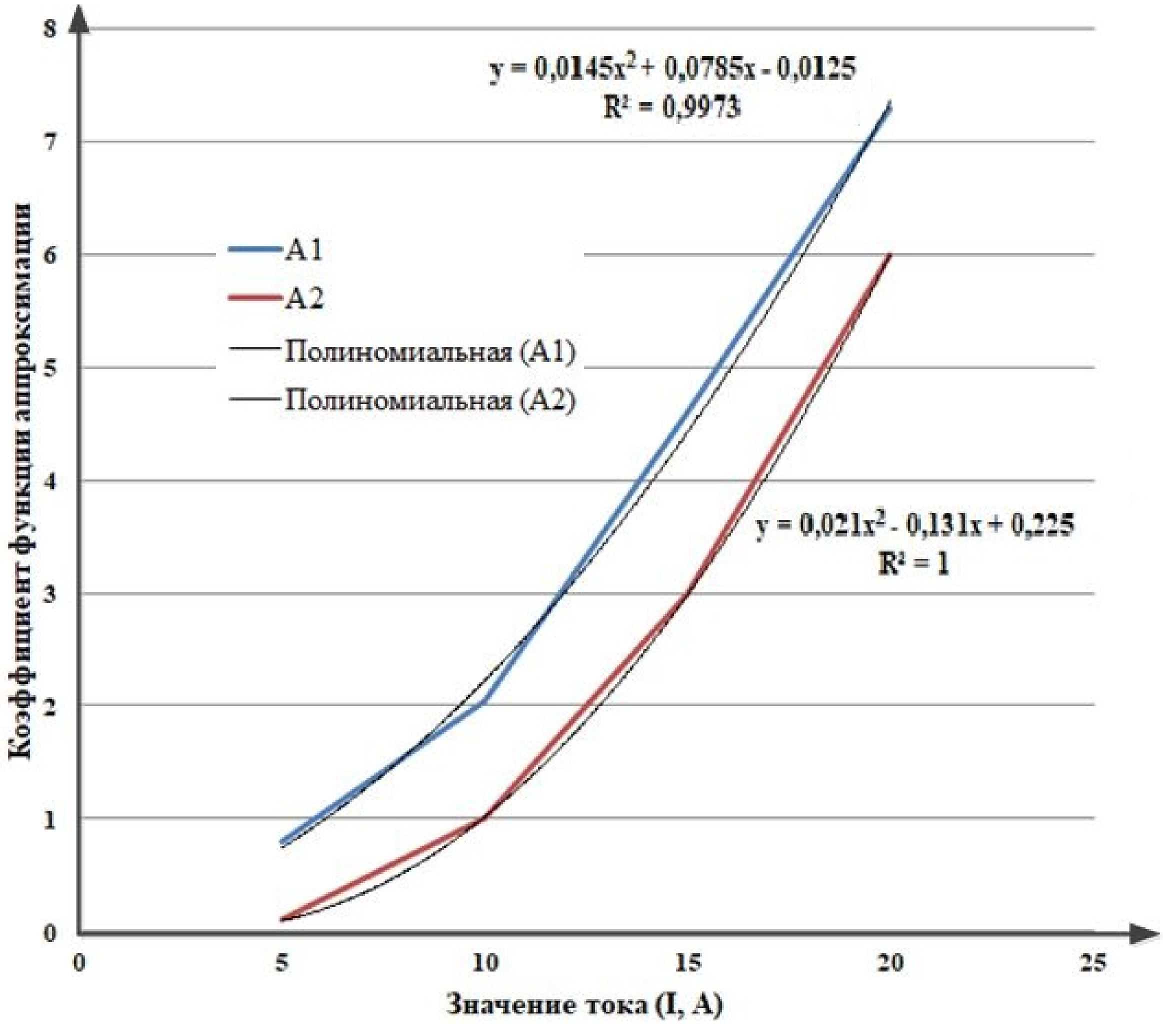

Рисунок 3.6 – Аппроксимация полиноминальными функциями 2-го порядка зависимости коэффициентов A_1 и A_2 от токов разряда

Поскольку значения коэффициентов A_1 и A_3 совпадают, то следовательно функции аппроксимации также совпадут. Аналогично для коэффициентов A_2 и A_4.

$$A_1 = A_3 = 0{,}0145 I^2 + 0{,}0785 I - 0{,}0125,$$
$$A_2 = A_4 = 0{,}021 I^2 - 0{,}131 I + 0{,}225.$$

Аналогично проведена процедура аппроксимации коэффициентов B_1 и B_2 рисунке 3.7.

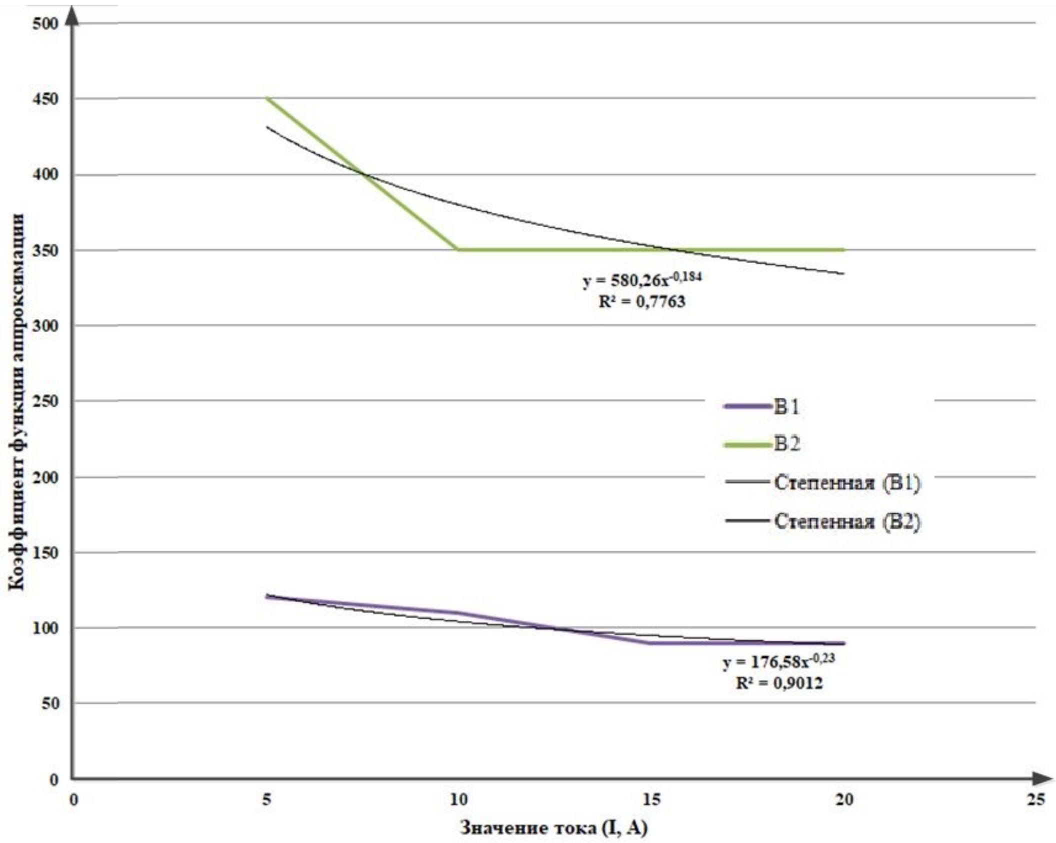

Рисунок 3.7 – Аппроксимация степенными функциями зависимости коэффициентов B_1 и B_2 от токов разряда

$$B_1 = B_3 = 176{,}58 I^{-0{,}23},$$
$$B_2 = B_4 = 580{,}26 I^{-0{,}184}.$$

Аналогично проведена аппроксимация коэффициента C (рисунок 3.8).

Таким образом, аналитическая функция аппроксимации примет вид:

$$\begin{gathered} T(x) = 0{,}178I + 19{,}2 + \\ + \frac{0{,}0145I^2 + 0{,}0785I - 0{,}0125}{1 + \exp(-176{,}58I^{-0{,}23}x - 1{,}2)} + \frac{0{,}021I^2 - 0{,}131I + 0{,}225}{1 + \exp(-580{,}26I^{-0{,}184}x + 6{,}8)} - \\ - \frac{0{,}0145I^2 + 0{,}0785I - 0{,}0125}{1 + \exp(-176{,}58I^{-0{,}23}x + 7)} - \frac{0{,}021I^2 - 0{,}131I + 0{,}225}{1 + \exp(-580{,}26I^{-0{,}184}x + 15)}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где x – координата рассматриваемой точки по оси X; I – значение тока, для которого ищется температура.

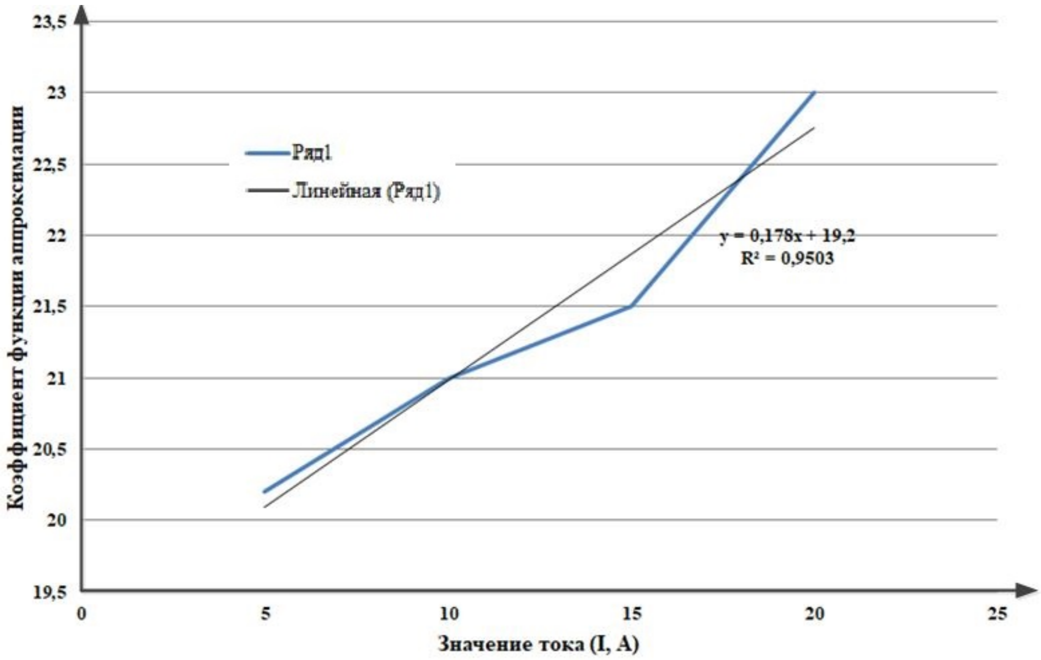

Рисунок 3.8 – Аппроксимация линейной функцией зависимости коэффициента C от токов разряда

$$C = 0{,}178I + 19{,}2.$$

Значение контролируемой температуры в точке x_2 вычисляется из (3.1) по значению измеряемой в точке x_1 и значению тока.

$$\begin{gathered}
T_{\text{контр}}(x_2) = T_{\text{изм}}(x_1) + \\
+\frac{0{,}0145I^2+0{,}0785I-0{,}0125}{1+\exp(-176{,}58I^{-0{,}23}x_2-1{,}2)}+\frac{0{,}021I^2-0{,}131I+0{,}225}{1+\exp(-580{,}26I^{-0{,}184}x_2+6{,}8)}- \\
-\frac{0{,}0145I^2+0{,}0785I-0{,}0125}{1+\exp(-176{,}58I^{-0{,}23}x_2+7)}-\frac{0{,}021I^2-0{,}131I+0{,}225}{1+\exp(-580{,}26I^{-0{,}184}x_2+15)}- \\
-\frac{0{,}0145I^2+0{,}0785I-0{,}0125}{1+\exp(-176{,}58I^{-0{,}23}x_1-1{,}2)}-\frac{0{,}021I^2-0{,}131I+0{,}225}{1+\exp(-580{,}26I^{-0{,}184}x_1+6{,}8)}+ \\
+\frac{0{,}0145I^2+0{,}0785I-0{,}0125}{1+\exp(-176{,}58I^{-0{,}23}x_1+7)}+\frac{0{,}021I^2-0{,}131I+0{,}225}{1+\exp(-580{,}26I^{-0{,}184}x_1+15)}.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Далее искомое значение критерия Δt получается из аналитического решения дифферециального уравнения Коши по начальному значению температуры контролируемого сегмента и значению температуры $T_{\text{контр}}$.

Следует отметить, что критические ситуации, связанные с повышением температуры, могут возникать в режимах, близких к установившемуся, где изменение разности между измеряемой и контролируемой температурой во времени практически постоянна (рисунок 3.9).

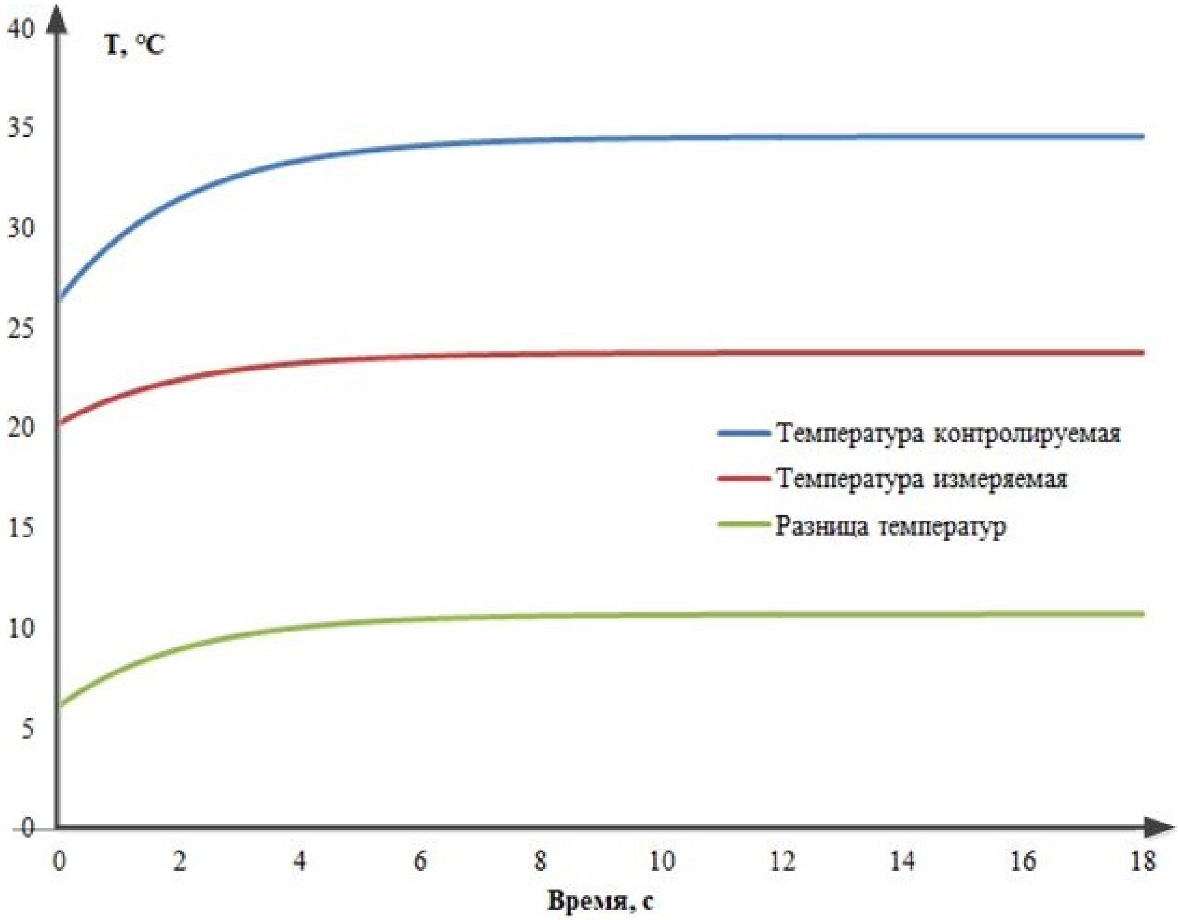

Рисунок 3.9 – Характер изменения разности температур в переходном режиме

3.3 Аппаратная структура системы диагностирования ЛИА по тепловым цифровым портретам

Аппаратная структура системы диагностирования состоит из самого объекта контроля – ЛИА, датчиков температуры, датчиков тока, бортового вычислителя и устройства управления с исполнительным коммутационным элементом (рисунок 3.10). На поверхности ЛИА располагаются точечные датчики температуры ($T_1, T_2,...,T_i$), причем количество этих датчиков может быть различным в зависимости от заданной точности. Располагаются датчики температуры в местах наибольшего нагрева устройства. Измеренные значения температуры с датчиков поступают на вход бортового вычислителя, в котором расчитывается аналитическое выражение контролиуемой температуры (по цифровому портрету). На основе полученных значений определяется критерий диагностирования. Информация, полученная из цифрового портрета ЛИА подается на устройство управления, которое вырабатывает сигналы и в случае критического значения внутренней температуры отключает ПЭЭ от ЛИА.

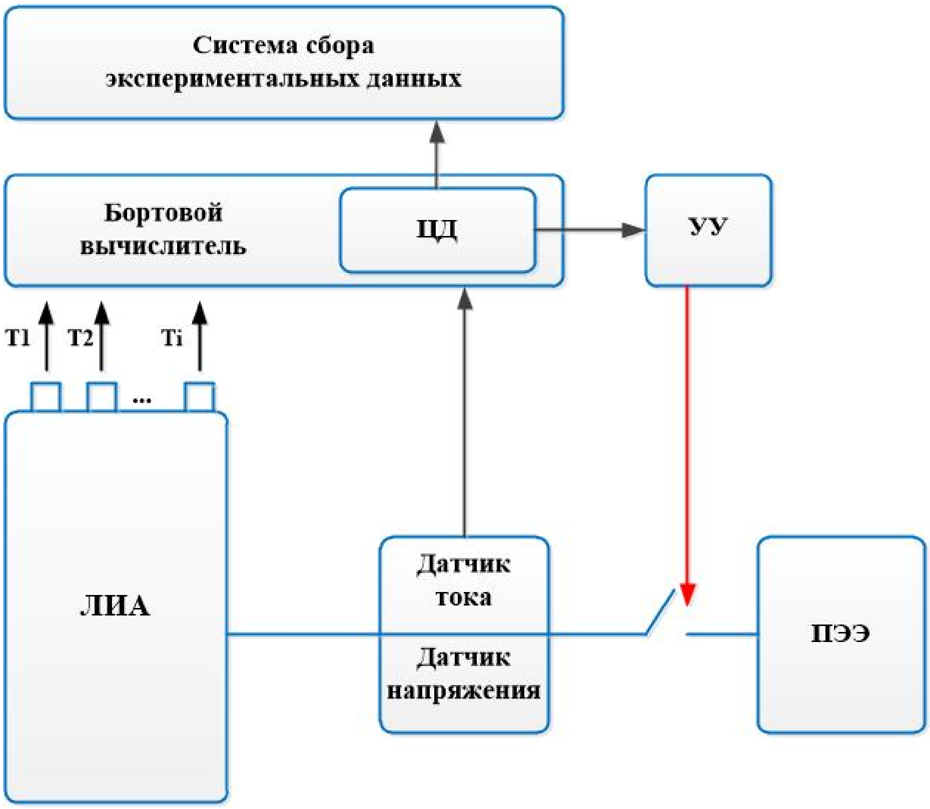

Рисунок 3.10 – Аппаратная структура системы диагностирования ЛИА по цифровым портретам

3.4 Метод диагностирования ЛИА по тепловым цифровым портретам

В общем случае метод диагностирования ЛИА может быть представлен в виде следующей последовательности действий (рисунок 3.11).

Первоначальным этапом является получение аналитической модели ЛИА, которое подробно описано во второй главе диссертации. После получения аналитической функции динамики распределения температуры, полученной с использованием модифицированного метода конечных объемов, уже можно говорить о цифровой модели исследуемого ЛИА (рисунок 3.12).

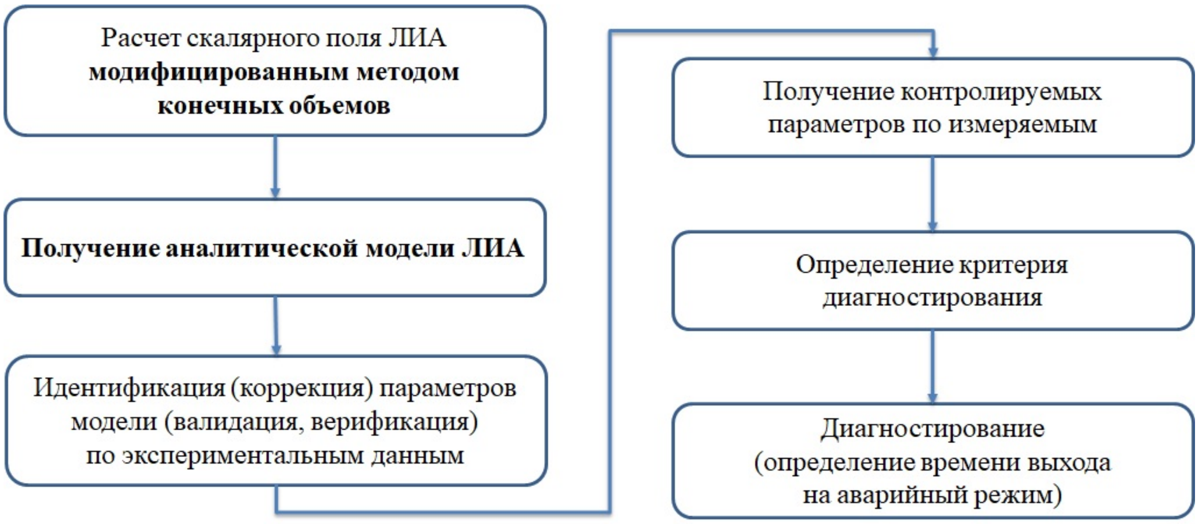

Рисунок 3.11 – Метод диагностирования ЛИА

Второй этап – идентификация параметров математической модели. Цифровой портрет, который будет использоваться в процессе диагностирования ЛИА, представляет собой компьютерную модель исследуемого объекта, которая уточняется по экспериментальным данным (процедура валидации), получаемым от объекта, тогда модель цифрового портрета будет обладать адекватностью и наиболее точно отражать свойства и процессы, протекающие в литийионном акумуляторе.

Рисунок 3.12 – Цифровой тепловой портрет ЛИА

Экспериментальные данные должны обновляться либо в режиме реального времени, либо с определенной периодичностью, которая зависит от динамики изменения собственных свойств объекта.

Созданная на основе математической модели компьютерная модель также должна быть уточнена для того, чтобы она соответствовала математической модели, этот процесс называется верификацией компьютерной модели.

Третьим этапом является определение контролируемых параметров по измеряемым. Температура в ЛИА внутри устройства, как правило, выше чем на его поверхности. Контролировать температуру внутри ЛИА точечными температурными датчика не представляется возможным. Следовательно, зная функцию распределения температуры внутри устройства можно пересчитать температуру с точечных датчиков, установленных на внешней части ЛИА, что является четвертым этапом методики.

3.5 Исследование точности определения диагностических признаков

На точность определения диагностических признаков в разрабатываемой методике диагностирования состояния ЛИА влияние оказывает систематическая погрешность измерения температуры и тока. Составляющей частью систематической погрешности является инструментальная погрешность, т.е. погрешность измерительных приборов, использующихся в методе диагностирования.

Как описано в аппаратной структуре системы диагностирования, на поверхности исследуемого объекта находятся точечные датчики температуры – термисторы. К основным достоинствам термисторов относят большое значение температурного коэффициента, а именно, изменение сопротивления в зависимотси от температуры. Исходя из этого, термисторы делятся на два типа: – термисторы с положительным температурным коэффициентом – увеличение сопротивления с увеличением температуры; – термисторы с отрицательным температурным коэффициентом – уменьшение сопротивления с увеличением температуры.

Для распространенных типов термисторов погрешность оценивается от 3 до 5 %.

Для измерения токов используются либо датчики, работающие на эффекте Холла, либо шунты, напряжение на которых измеряется аналого-цифровыми преобразователями. Суммарные методические и случайные погрешности этих преобразователей также влияют на точнось получения диагностических данных. При этом требуемая точность измерения тока может быть обеспечена соответствующим выбором разрядности и быстродействия аналого-цифровых преобразователей.

3.6 Выводы по третьей главе

В третьей главе диссертации:

– выбран и обоснован критерий диагностирования ЛИА – интервал времени, за который температура самого нагретого элемента преодолеет критическое значение;

– получена упрощенная аналитическая модель скалярного поля температур ЛИА путем аппроксимации при использовании в качестве базисных сигмоидные функции;

– определена аппартная структура системы диагностирования ЛИА;

– разработан метод диагностирования теплового состояния ЛИА на основе цифрового (теплового) портрета, который включает применение нового модифицированного метода конечных объемов, гарантирующего заданную точность модели, а следовательно и оценки.

4 Экспериментальные исследования разработанных методик

4.1 Исследование тепловых режимов литийионного аккумулятора модифицированным методом конечных объемов

Для исследования тепловых режимов литийионного аккумулятора с использованием модифицированного метода конечных объемов первоначальным этапом задаются справочные данные (таблица 4.1) и исходная геометрия устройства (рис.4.1). Для экспериментального исследования в литийионном аккумуляторе учтены свойства двойных слоев – приэлектродных областей электролита, свойства которых в общем случае отличаются от свойств электролита и электродов.

Таблица 4.1 – Задание исходных данных

	$x_{\min}$, м	$x_{\max}$, м	$y_{\min}$, м	$y_{\max}$, м	$z_{\min}$, м	$z_{\max}$, м
V_1	0	0,037	0	0,05	0	0,065
V_2	0,037	0,038	0	0,05	0	0,065
V_3	0,038	0,075	0	0,05	0	0,065
V_4	0,075	0,076	0	0,05	0	0,065
V_5	0,076	0,113	0	0,05	0	0,065
V_6	–0,0452	0	0	0,05	0	0,065
V_7	0,113	0,565	0	0,05	0	0,065
V_8	–0,452	0,565	0,05	0,1	0	0,065
V_9	–0,452	0,565	–0,05	0	0	0,065
V_{10}	–0,452	0,565	–0,05	0,1	–0,065	0
V_{11}	–0,452	0,565	–0,05	0,1	0,065	0,13

V_1 – объем, моделирующий электрод1;

V_2 – объем, моделирующий предэлектродную зону-1;

V_3 – объем, моделирующий электролит;

V_4 – объем, моделирующий предэлектродную зону-2;

V_5 – объем, моделирующий электрод;

V_6 – объем, моделирующий воздух, примыкающий к электроду-1 по оси ;

V_7 – объем, моделирующий воздух, примыкающий к электроду-2 по оси ;

V_8 – объем, моделирующий воздух, примыкающий к геометрии аккумулятора по оси Y (по передней стенке);

V_9 – объем, моделирующий воздух, примыкающий к геометрии аккумулятора по оси Y (по задней стенке);

V_{10} – объем, моделирующий воздух, примыкающий к геометрии аккумулятора по оси Z (по верхней стенке);

V_{10} – объем, моделирующий воздух, примыкающий к геометрии аккумулятора по оси Z (по задней стенке).

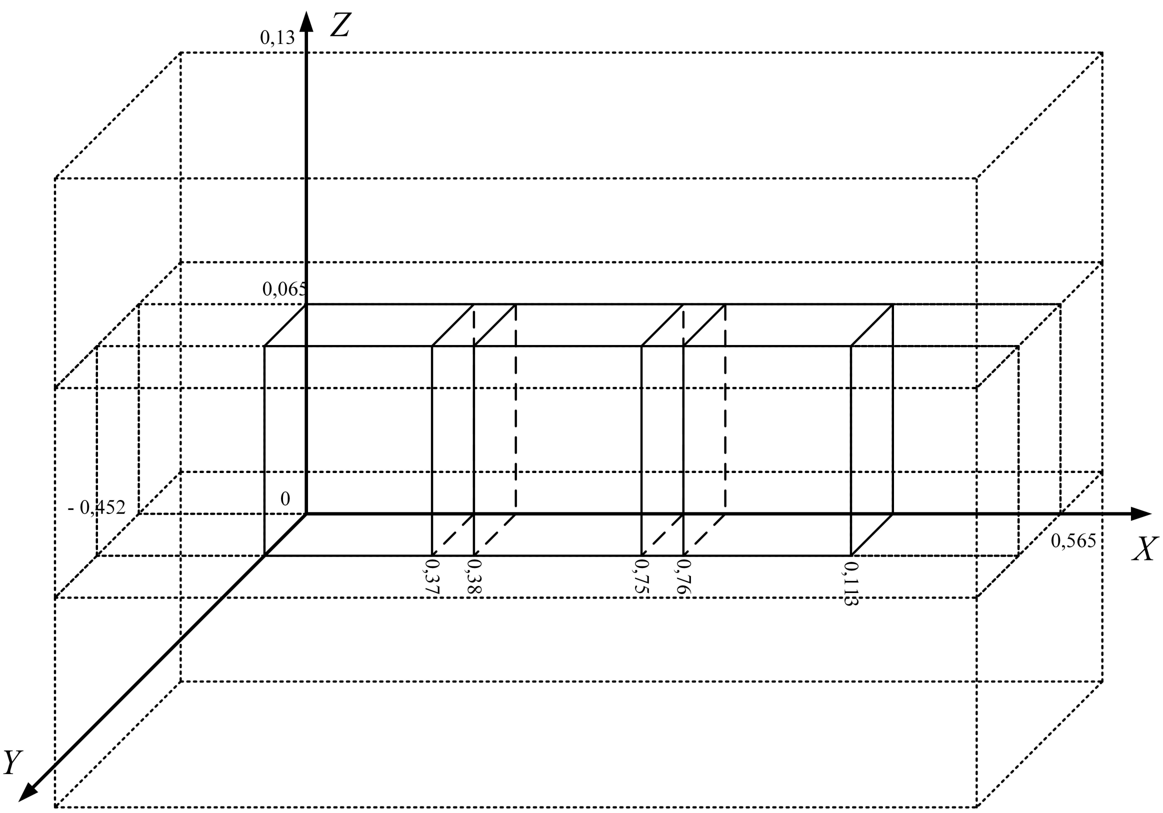

Рисунок 4.1 – Исходная геометрия для расчета теплораспределения

Для каждого объема, моделирующего соответствующий элемент геометрии, задаются справочные данные (таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Задание справочных данных материалов

	ρ, кг/м^3	λ, Вт·м	C, Дж/(кг·К)	ρ_R, Ом·м	id_m	j_ix, А/м^2	j_iy, А/м^2	j_iz, А/м^2
V_1	534	71	3580	16e-8	0	0	0	37500
V_2	534	71	3580	32e-8	0	37500	0	0
V_3	1,1	10	1500	32e-7	1	37500	0	0
V_4	2270	200	840	32e-8	2	37500	0	0
V_5	2270	200	840	16e-8	2	0	0	37500
V_6	1,2	0,26	1	0	3	0	0	0
V_7	1,2	0,26	1	0	3	0	0	0
V_8	1,2	0,26	1	0	3	0	0	0
V_9	1,2	0,26	1	0	3	0	0	0
V_{10}	1,2	0,26	1	0	3	0	0	0
V_{11}	1,2	0,26	1	0	3	0	0	0

Исходные данные из таблиц 4.1–4.2 формируются в файле формата JSON, который поступает на вход программы, реализующей модифицированный метод конечных объемов и расчитывающий распределение тепла в каждом полученном объеме в статическом (установившемся) режиме (Приложение 1).

Результаты расчета распределения температур для разных режимов работы (ток разряда от 5 до 20 А) и внешних воздействий (температура от –40 до +40 °C) представлены на рисунках 4.2–4.8.

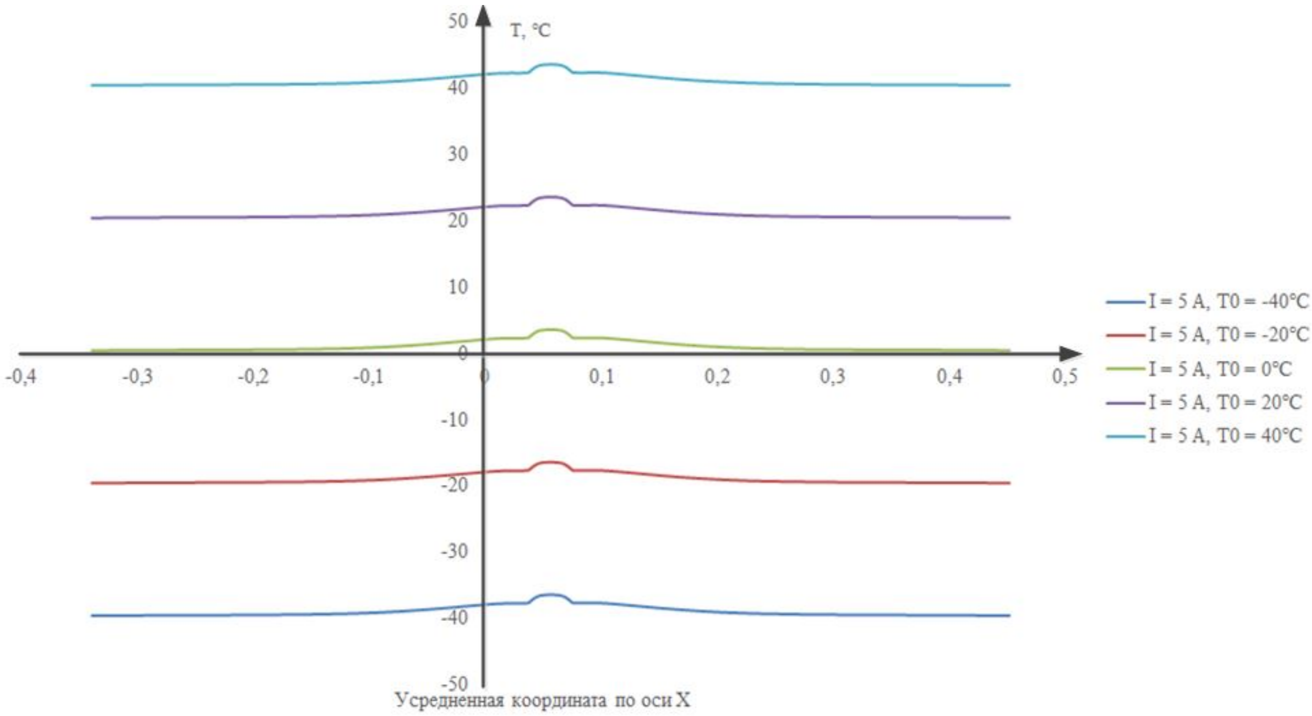

Рисунок 4.2 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $y = 0{,}026$, $z = 0{,}0326$ при $I = 5$ А

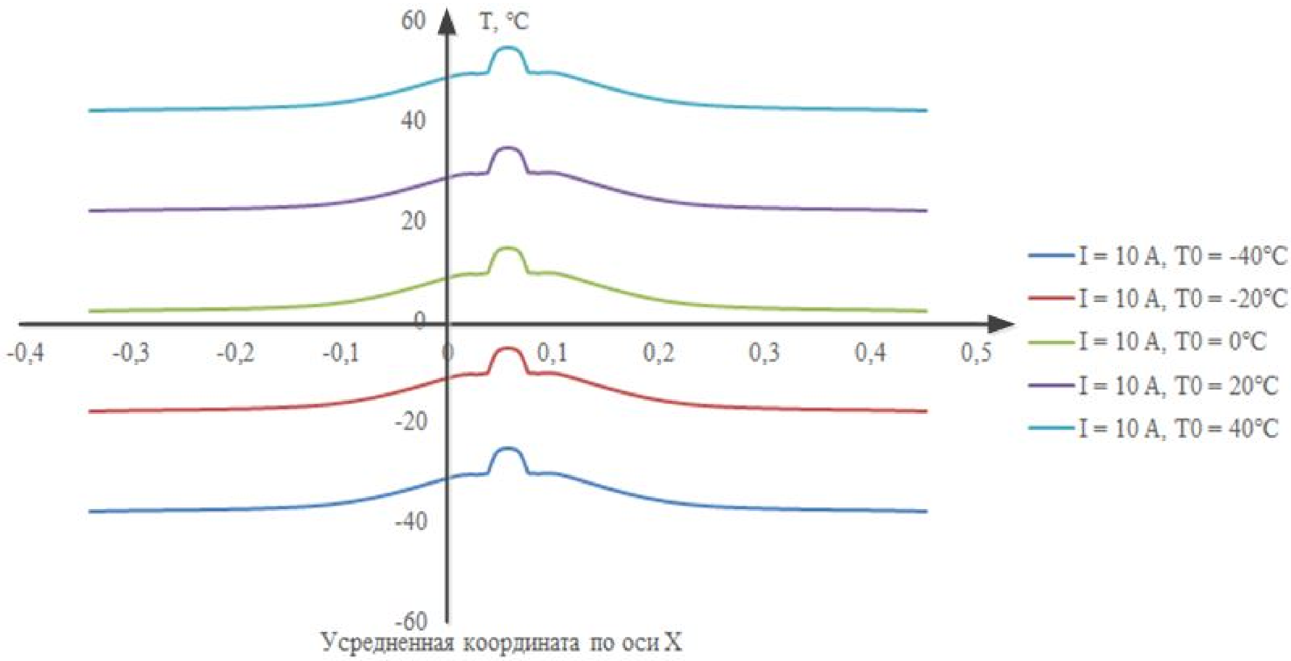

Рисунок 4.3 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $y = 0{,}026$, $z = 0{,}0326$ при $I = 10$ А

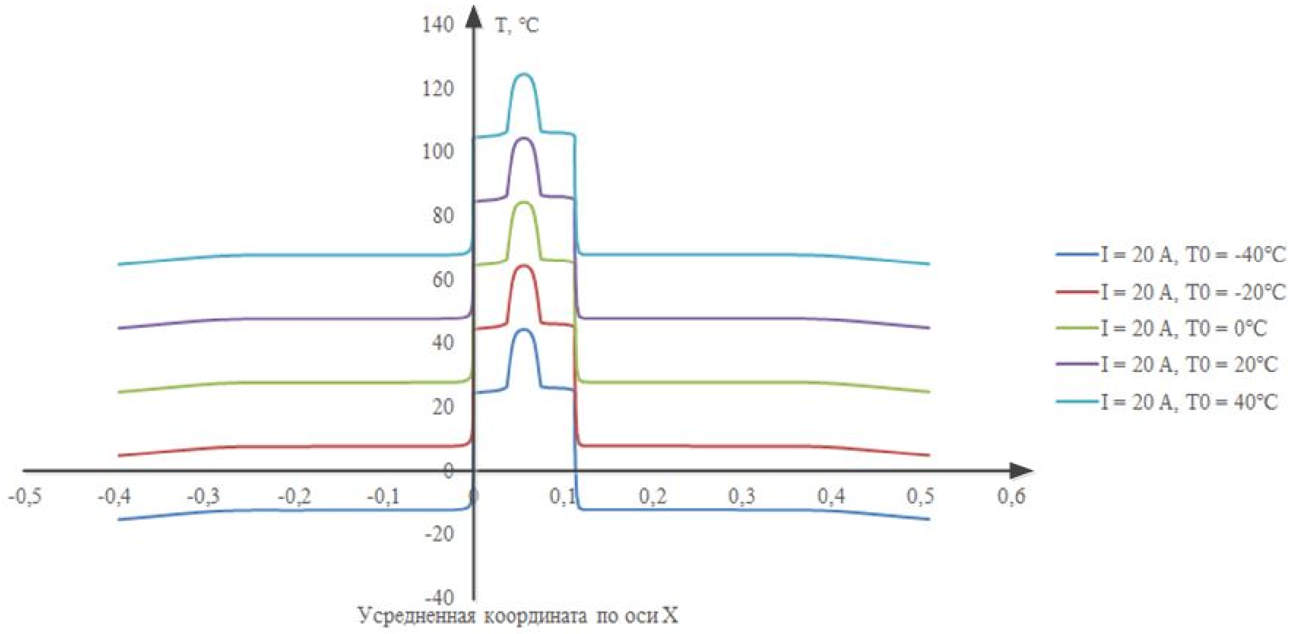

Рисунок 4.4 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $y = 0{,}026$, $z = 0{,}0326$ при $I = 20$ А

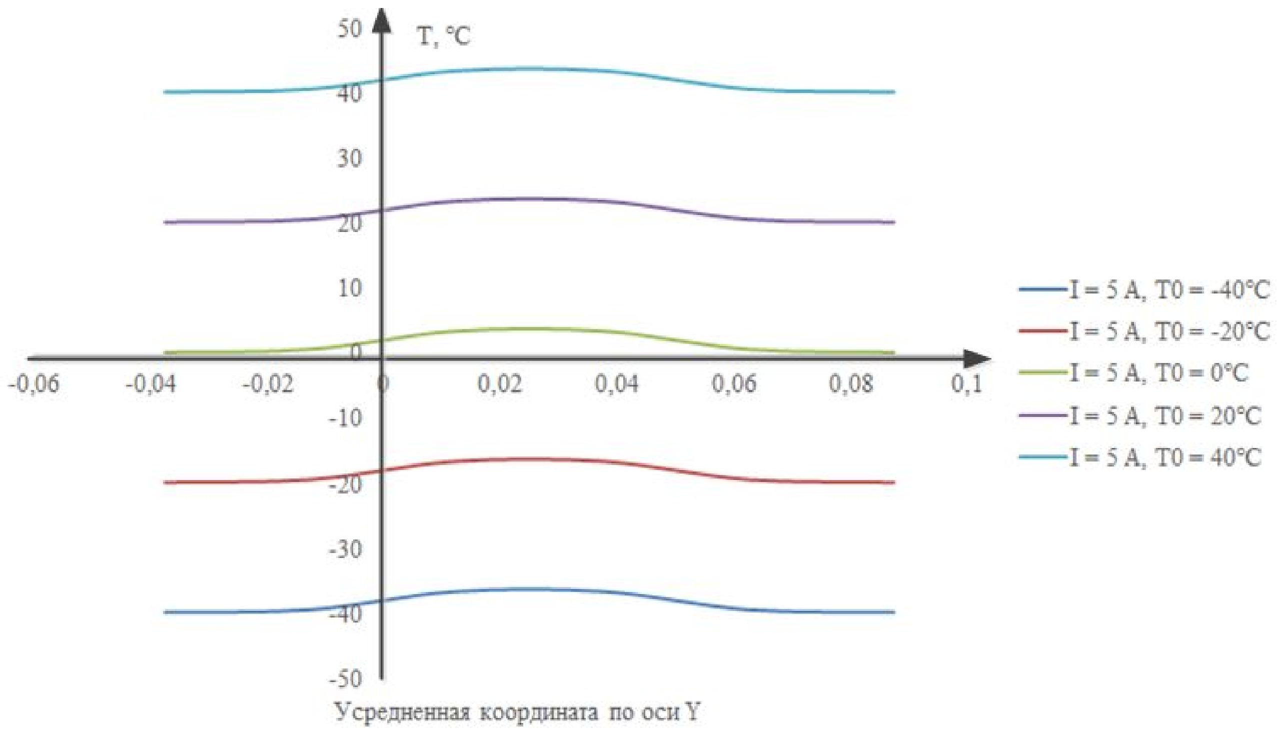

Рисунок 4.5 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $x = 0{,}0566$, $z = 0{,}0326$ при $I = 5$ А

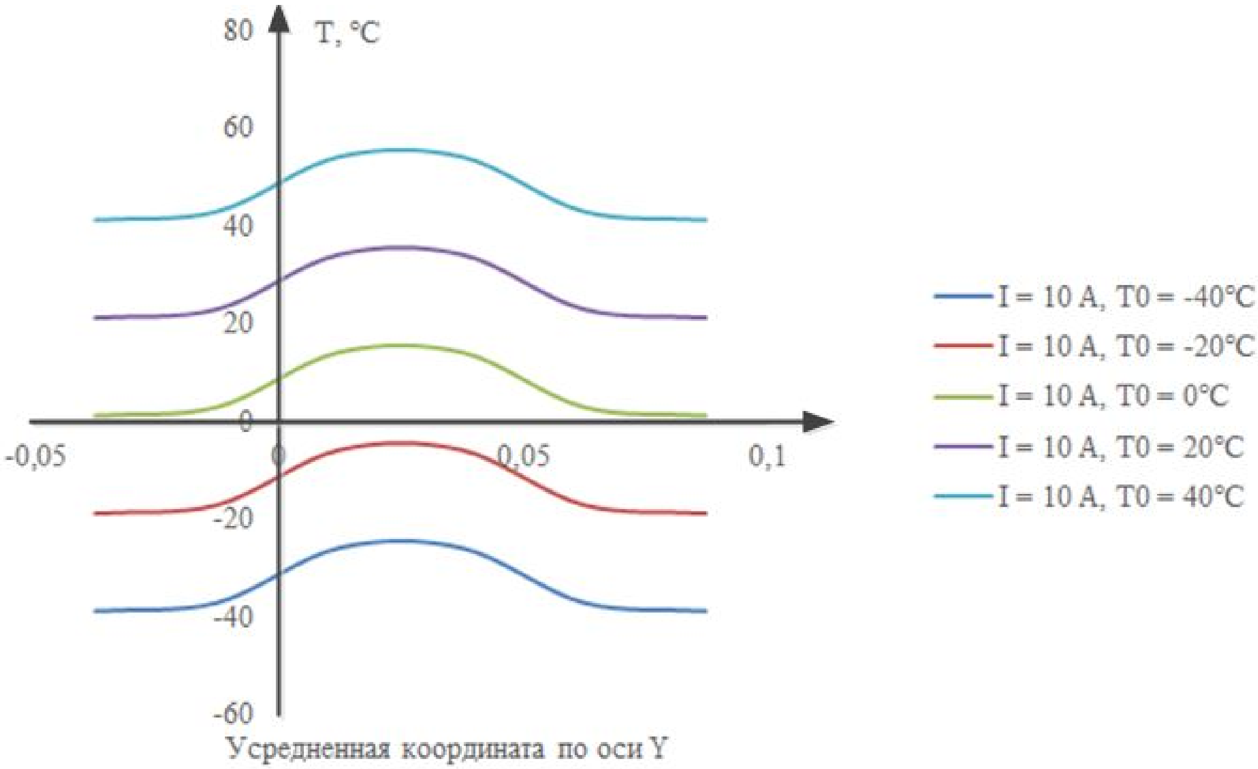

Рисунок 4.6 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $x = 0{,}0566$, $z = 0{,}0326$ при $I = 10$ А

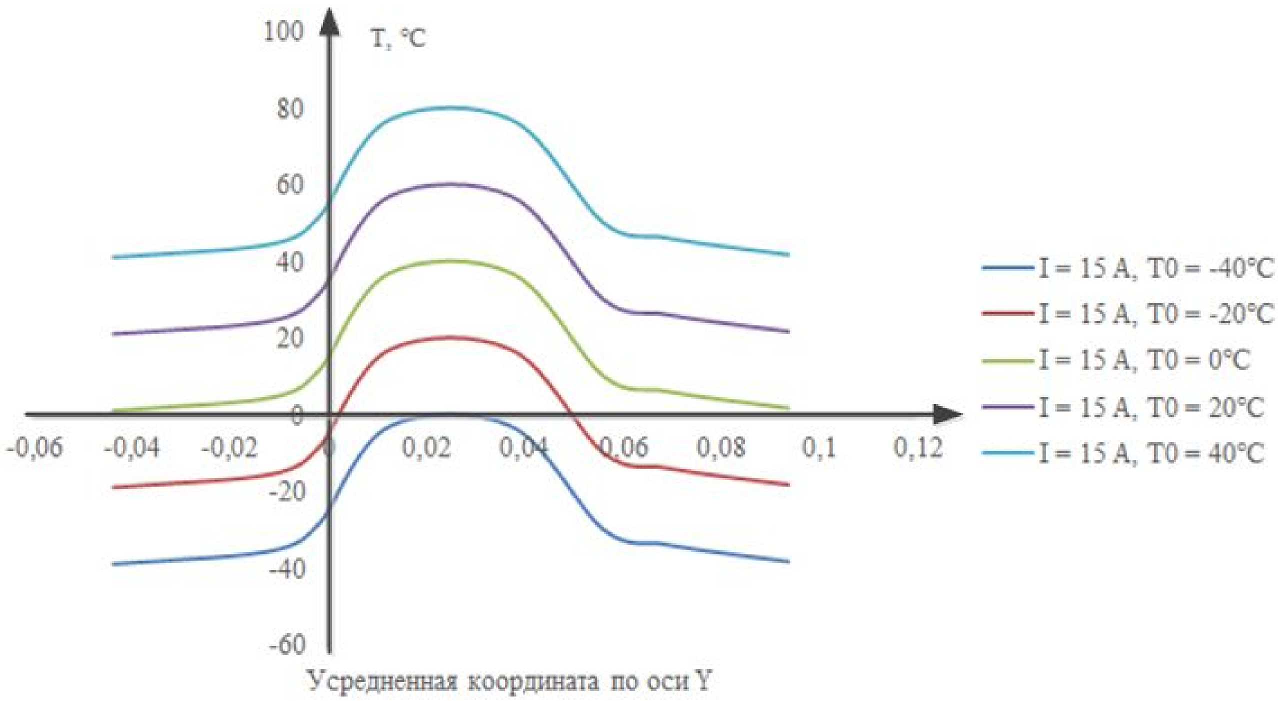

Рисунок 4.7 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $x = 0{,}0566$, $z = 0{,}0326$ при $I = 15$ А

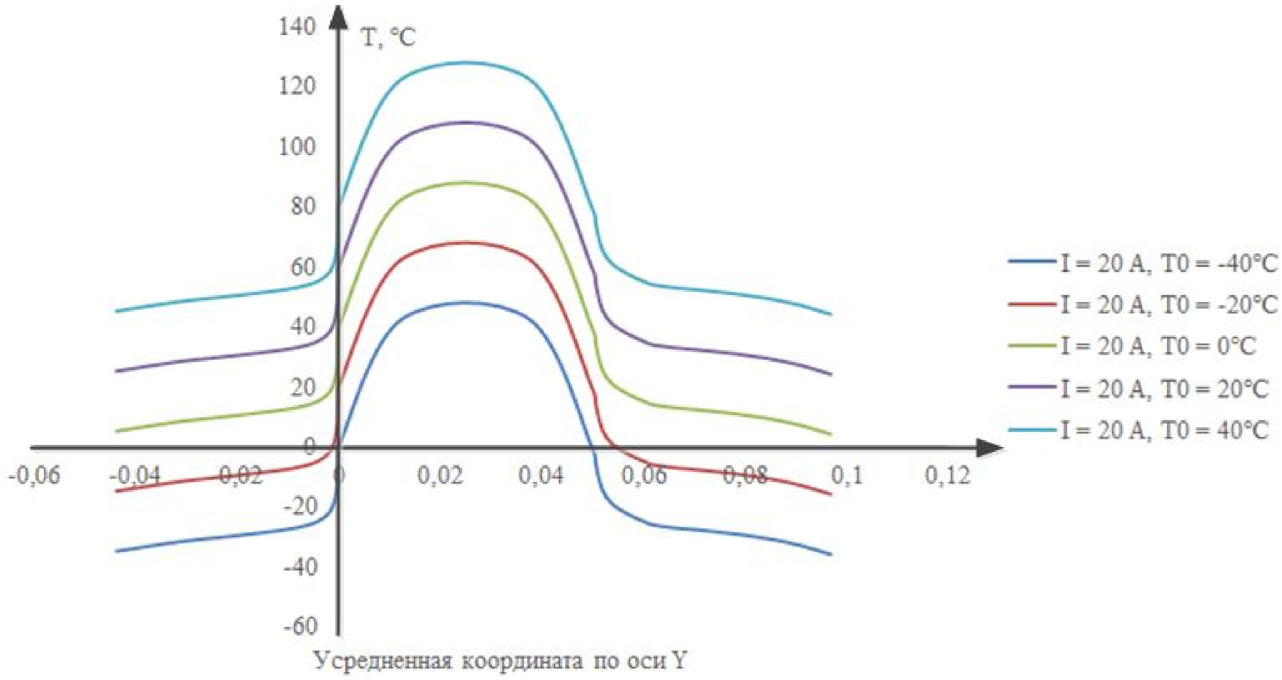

Рисунок 4.8 – Расчет теплораспределения для исходной геометрии $x = 0{,}0566$, $z = 0{,}0326$ при $I = 20$ А

Как видно из рисунков 4.2-4.8, наиболее нагретой является область электролита аккумулятора.

Полученное в статике разбиение геометрии, включая все атрибуты, сохраняются в новый файл JSON, который поступает на вход программы для расчета динамики распределения температуры (Приложение 2).

4.2 Экспериментальные исследования поля температур аккумулятора

Для исследования тепловых режимов литийионных аккумуляторных батарей был использован аккумулятор Sony US18650VTC6 (рисунок 4.9), обладающий характеристиками, представленными в таблице 4.3, термистор (рисунок 4.10), обладающий характеристиками, представленными в таблице 4.4.

Рисунок 4.9 – Аккумулятор Sony US18650VTC6

Таблица 4.3 – Характеристики аккумулятора Sony US18650VTC6

Характеристика	Значение
Номинальная емкость	3130 мАч
Номинальное напряжение	3,6 В
Максимальное напряжение разряда	4,2 В
Стандартный ток зарядки	3 А
Максимальный ток разрядки	30 А
Напряжение окончания разрядки	2,5 В
Время зарядки	2,5 часа
Допустимая температура для заряда	от 0 до +60 °C
Допустимая температура для разряда	от –20 до +60 °C
Оптимальная температура эксплуатации	23 °C
Средний вес	50 г

Рисунок 4.10 – Термистор NTC B57164K

Таблица 4.4 – Характеристики термистора NTC B57164K

Характеристика	Значение
Погрешность B (постоянный коэффициент)	3 %
B25/100	2920–5000 K
Диапазон сопротивлений	10–470 кОм (при 25 °C)
Погрешность сопротивления	10 %
Диапазон рабочих температур	от –55 до +125 °C
Мощность	450 мВт макс
Длина выводов	30 мм
Габаритные размеры	5,5 мм х 5 мм
Монтаж	на плату

Алгоритм проведения экспериментальных исследований:

– ЛИА полностью заряжается от сети;

– на корпус устройства закрепляются два датчика температуры NTC B57164K;

– с помощью электроного нагрузочного устройства аккумулятор разряжается током $I = 3{,}3$ А;

– сигналы с датчиков в каждый момент времени поступают на плату, на которой происходит преобразование значения сопротивления в температуры. Для реализации преобразования перед опытом на плату был загружен datasheet;

– данные поступают на ПК, пока аккумулятор полностью не разрядится;

– после ЛИА заново заряжается и опыт повторяется для другого значения тока разряда ($I = 5$ А, $I = 9$ А).

На рисунках 4.11–4.16 представлены результаты экспериментальных исследований – полученные значения температуры с каждого датчика.

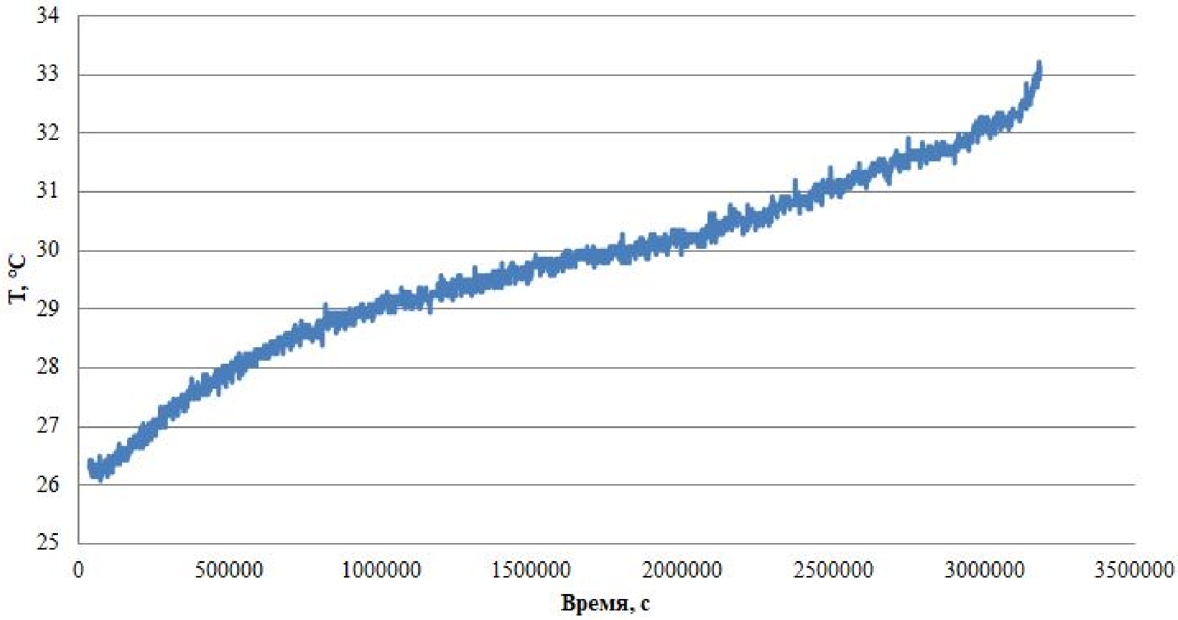

Рисунок 4.11 – Зависимость температуры от времени с датчика 1 при разряде аккумулятора током $I = 3{,}3$ А

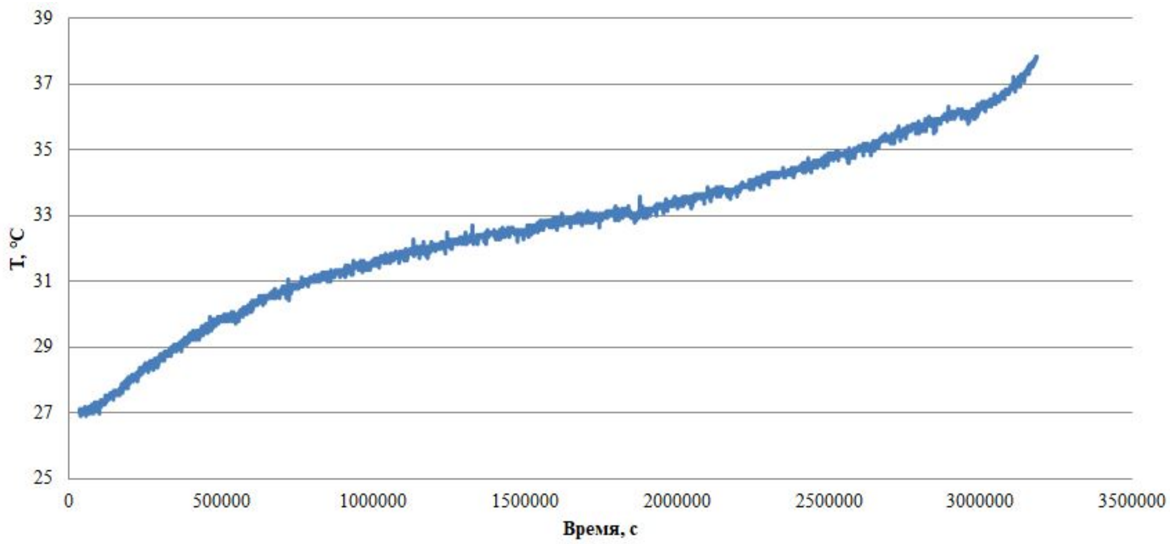

Рисунок 4.12 – Зависимость температуры от времени с датчика 2 при разряде аккумулятора током $I = 3{,}3$ А

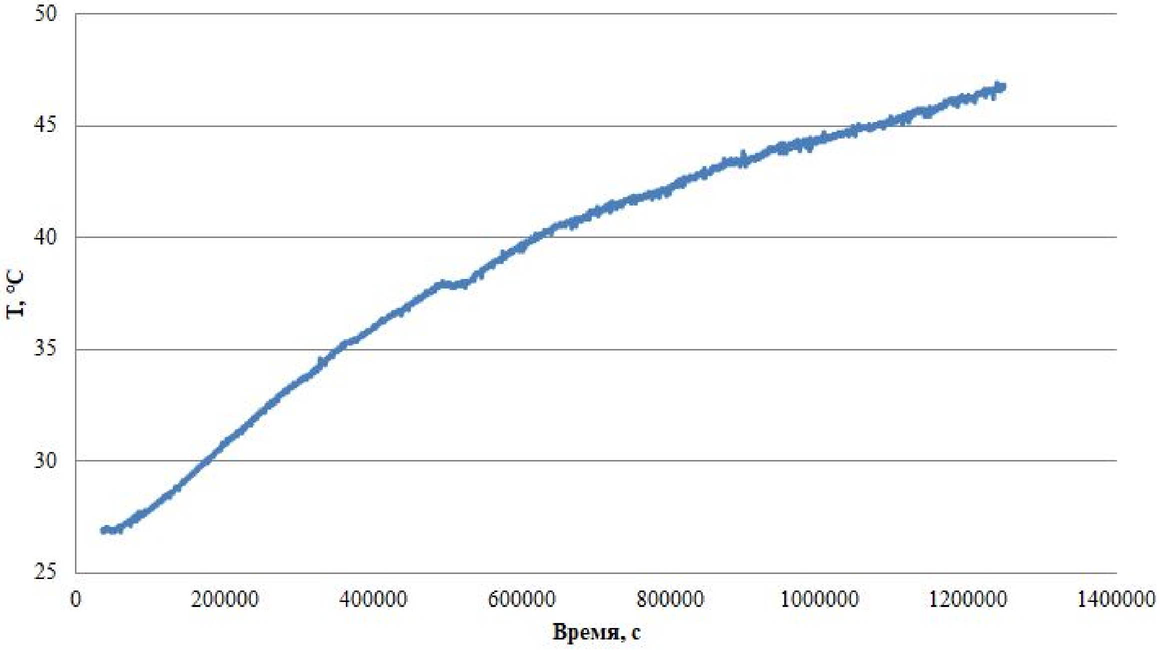

Рисунок 4.13 – Зависимость температуры от времени с датчика 1 при разряде аккумулятора током $I = 5$ А

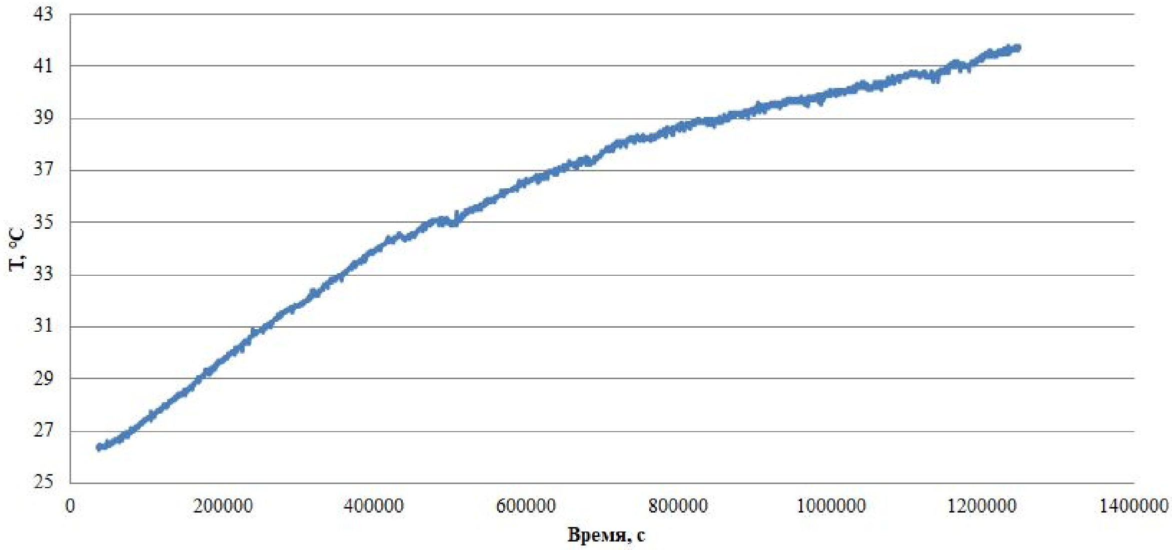

Рисунок 4.14 – Зависимость температуры от времени с датчика 2 при разряде аккумулятора током $I = 5$ А

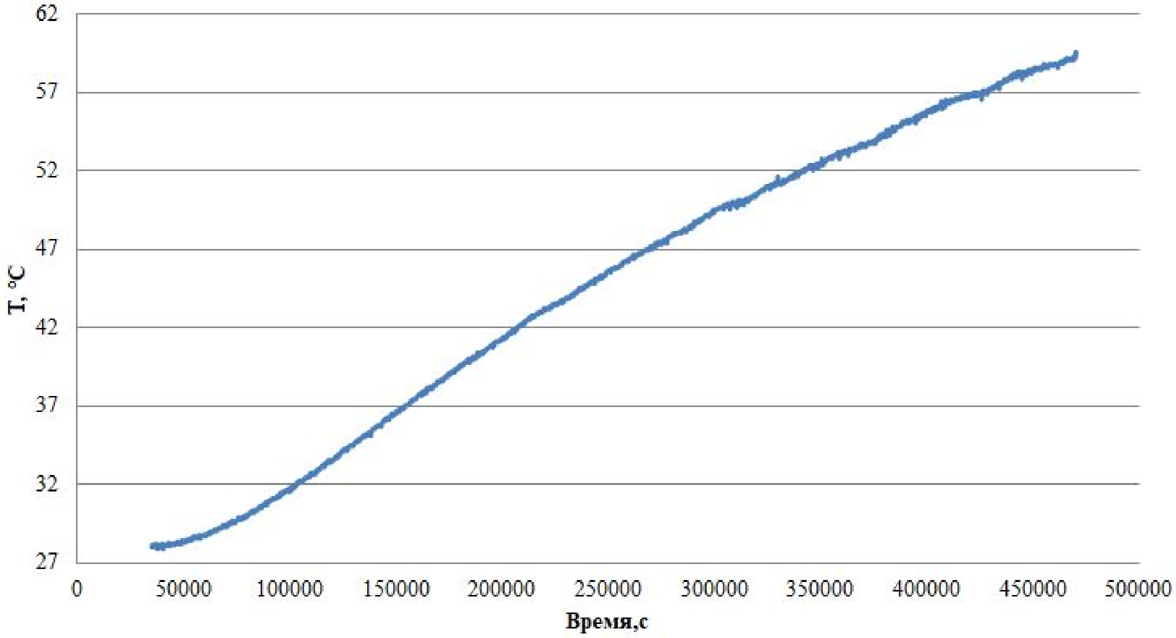

Рисунок 4.15 – Зависимость температуры от времени с датчика 1 при разряде аккумулятора током $I = 9$ А

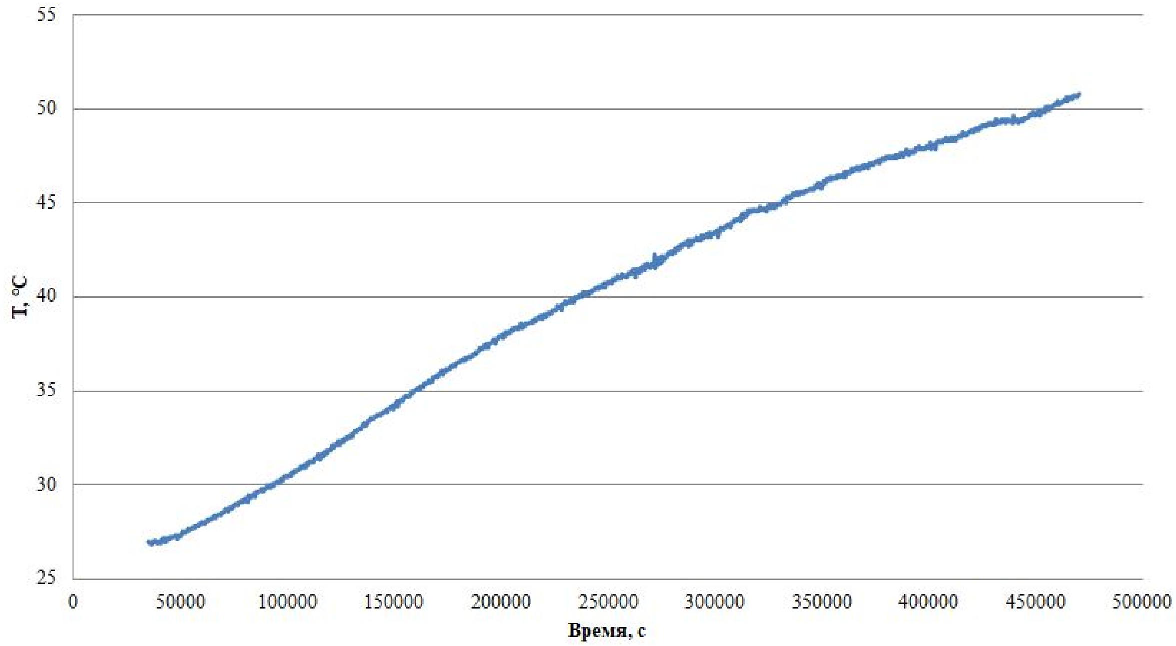

Рисунок 4.16 – Зависимость температуры от времени с датчика 2 при разряде аккумулятора током I =9 А

Для сравнительной оценки расчетных данных с экспериментальными и корректировке параметров разработанной модели проведена аппроксимация экспериментальных данных для временного отрезка от 0 до 300 с полиномом второй степени (рисунок 4.17).

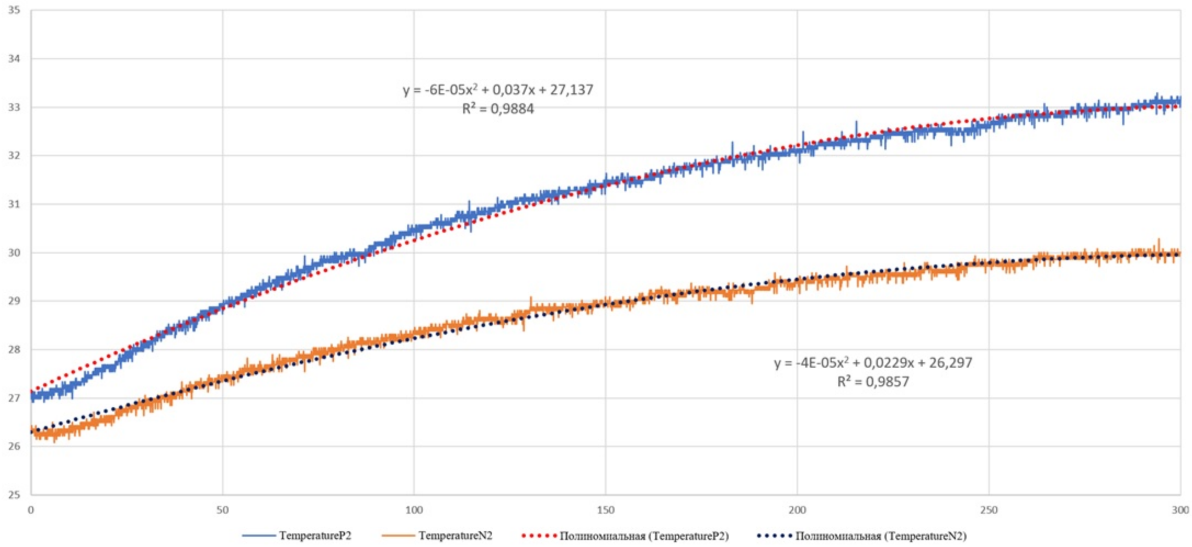

Рисунок 4.17 – Аппроксимация экспериментальных данных полиномами второй степени

Используя полученные функции аппроксимации, проведена корректировка параметров математической модели аккумулятора (валидация), которая показала, что точность полученной модели не превышает 3 % от максимального значения температуры (рисунок 4.18).

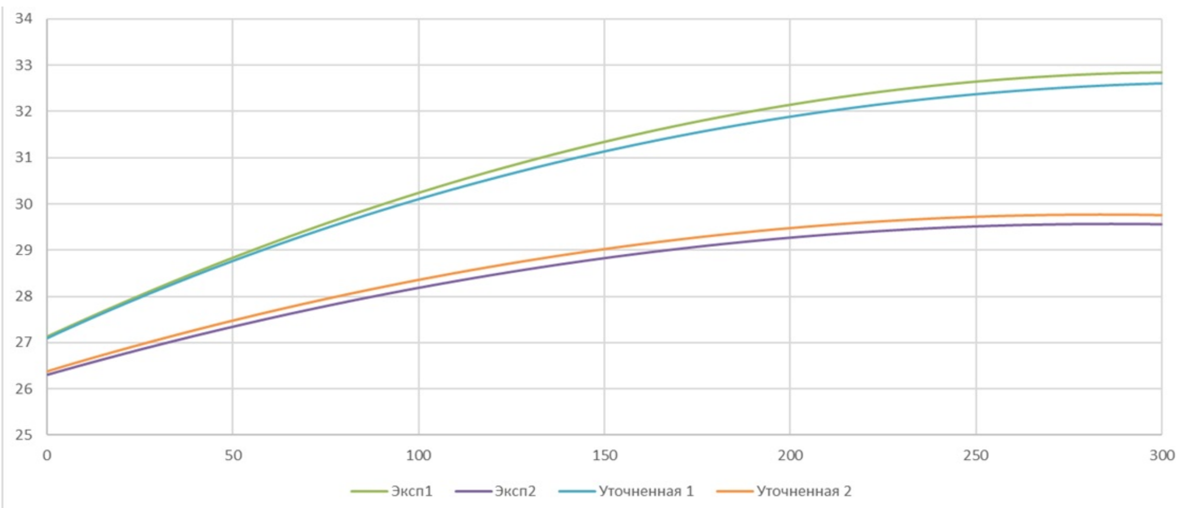

Рисунок 4.18 – Коррекция параметров математической модели по экспериментальным данным (валидация)

4.3 Исследование влияния коэффициента теплоотдачи на максимальное значение температуры системы

Кэффициент теплоотдачи между стенками аккумулятора и воздухом является одним из важнейших параметров, влияющих на тепловые режимы электротехнических устройств. От того насколько быстро отводится теплота от максимально нагретых элементов устройства напрямую зависит возможность его работы в более напряженном, а иногда и в перегрузочном, режиме.

Использование продува с помощью набегающего потока воздуха или применяя вентиляторы, можно увеличить коэффициент теплоотдачи в сотни раз. Еще более эффективным является применение жидкостной или испарительной систем охлаждения, однако они требуют наличия дополнительных конструктивных решений.

С использованием разработанного метода конечных объемов проведено исследование зависимости максимальной температуры литийионного аккумулятора от коэффициента теплоотдачи между стенками аккумулятора и воздухом. Результаты исследования представлены на графике (рисунок 4.19).

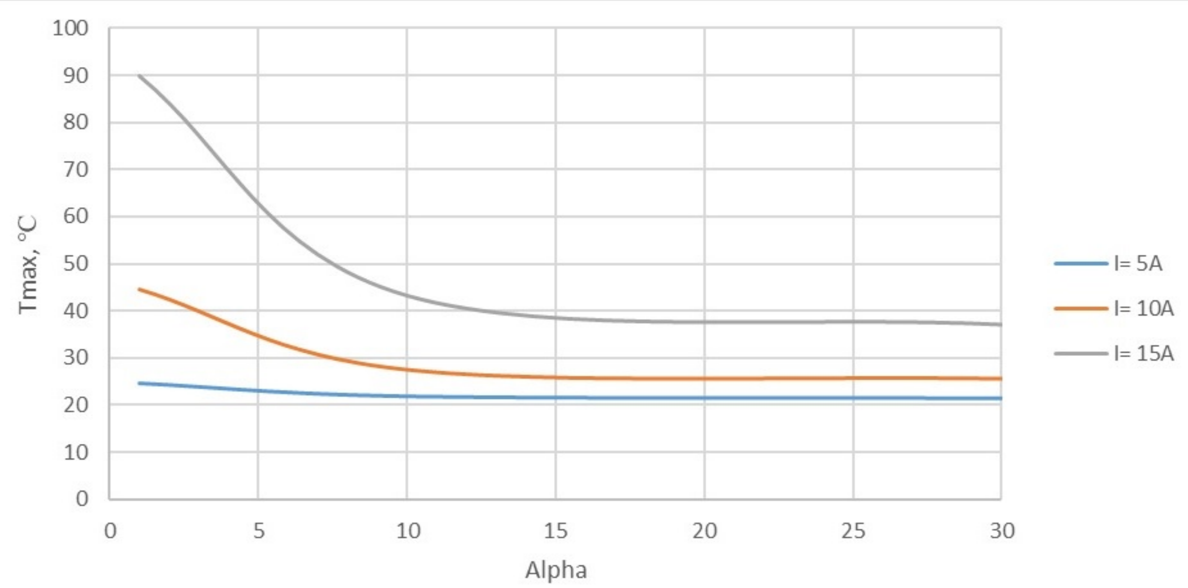

Рисунок 4.19 – Зависимость температуры максимально нагретого элемента ЛИА от коэффициента теплоотдачи между стенкой ЛИА и воздухом

Анализ полученных зависимостей позволяет сделать ряд практических выводов:

1. При применении мер, направленных на увеличение теплоотдачи, имеется возможность снизить рабочую температуру до 2,5 раз, что улучшает условия предотвращения теплового режима.

2. При загрязнении в процессе эксплуатации стенок аккумуляторов, ухудшающих коэффициент теплоотдачи, критическая температура, характеризующая предаварийное состояние может быть достигнуто быстрее и при меньших значениях токов.

3. При использовании специальных систем охлаждения (продув, жидкостное или испарительное) имеется возможность использовать аккумуляторы при больших токовых нагрузках при сохранении заданного температурного режима.

4.4 Формирование рекомендаций по применению метода диагностирования ЛИА на основе их температурных режимов

Как было отмечено ранее, средства измерения температуры аккумуляторов и аккумуляторных батарей не может быть расположено внутри аккумуляторов, где температура максимальна и она определяет его предельные температурные свойства, поэтому важно получить зависимость температуры в контролируемой точке от измеряемой. Такие аналитические зависимости можно получить, используя в качестве эталона математическую модель на основе решения уравнений теплопроводности.

Для получения значений контролируемых параметров недостаточно установить датчики температуры, так как они могут быть установлены не везде. Поэтому для оценки контролируемых параметров необходимо использовать тепловые математические модели для исследуемых режимов работы оборудования.

Проведенные экспериментальные исследования при различных токовых нагрузках позволяют определять предпочтительное место установки точечных датчиков температуры. В случае литийионной аккумуляторной батареи наиболее нагретой частью, доступной для установки датчика температуры, является внутренний положительной электрод, поэтому и устанавливать датчик необходимо либо на самом электроде, либо максимально приближенно к нему (рисунки 4.20–4.22).

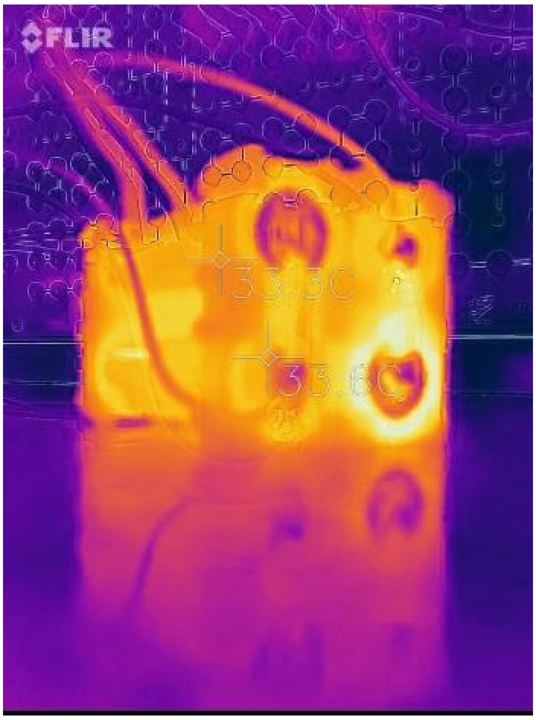

Рисунок 4.20 – Температура ЛИА при токе $I = 3$ А на 15-й минуте

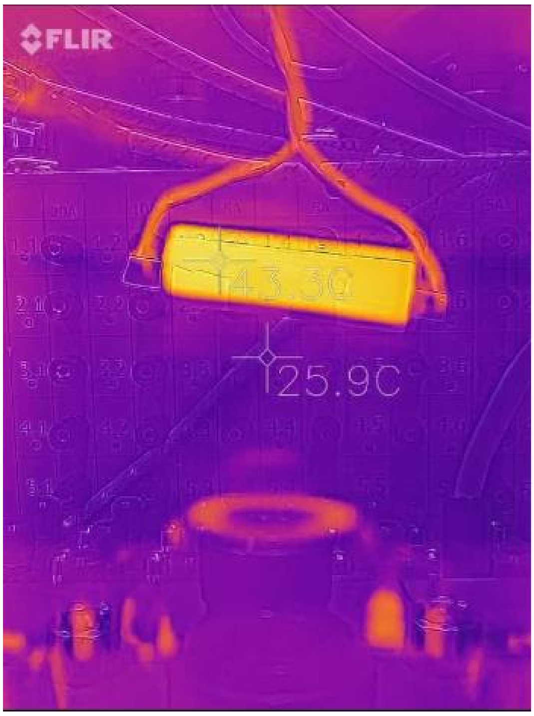

Рисунок 4.21 – Температура ЛИА при токе $I = 6$ А на 15-й минуте эксперимента

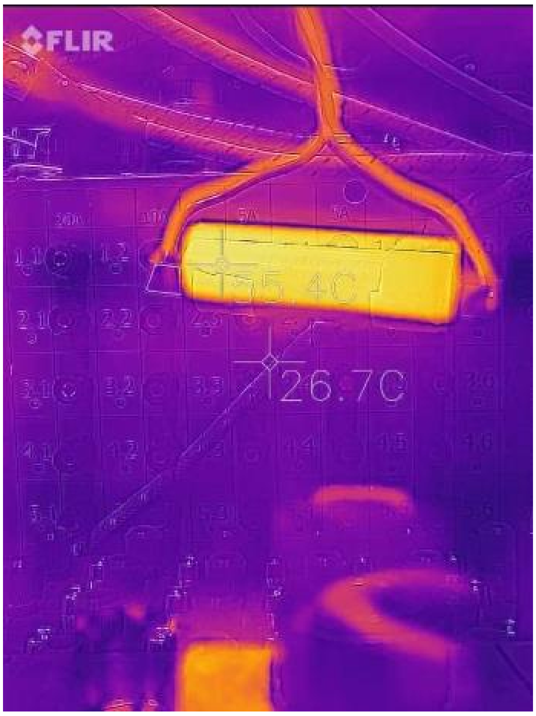

Рисунок 4.22 – Температура ЛИА при токе $I = 9$ А на 8-й минуте эксперимента

Таким образом, в ходе проведенных экспериментов и решения модели можно сделать вывод, что распределение температуры в АБ неравномерно и наиболее нагретой частью, доступной для установки датчика температуры, является внутренний положительный электрод.

4.5 Выводы по четвертой главе

1. Сравнительный анализ результатов экспериментальных исследований и расчетов распределения температур для разных режимов работы (ток разряда от 5 до 20 А) и внешних воздействий (температура от –40 до +40 °С) с применением разработанного модифицированного метода конечных объемов показали адекватность полученных моделей, а следовательно, могут быть использованы при разработке цифровых двойников литийионных аккумуляторов.

2. Использование полиномиальной аппроксимации эксперименальных данных позволило скорректировать параметры математических моделей (провести валидацию), что гарантирует их адекватность.

3. Анализ зависимостей максимальной температуры от коэффициента теплоотдачи между стенками ЛИА и воздухом позволяет сделать ряд практических выводов:

– при применении мер, направленных на увеличение теплоотдачи, имеется возможность снизить рабочую температуру до 2,5 раз, что улучшает условия предотвращения теплового режима;

– при загрязнении в процессе эксплуатации стенок аккумуляторов, ухудшающих коэффициент теплоотдачи, критическая температура, характеризующая предаварийное состояние может быть достигнута быстрее и при меньших значениях токов;

– при использовании специальных систем охлаждения (продув, жидкостное или испарительное) имеется возможность использовать аккумуляторы при больших токовых нагрузках при сохранении заданного температурного режима.

Заключение

Основными результатами, полученными в ходе выполнения диссертации являются:

1. Проведен анализ основных причин тепловыделения электротехнических устройств ВС при регламентных и аварийных режимах работы. Рассмотрены основные последствия, возникающие при чрезмерной нагреве устройств.
2. Проведен анализ основных методов диагностики, использующихся на современных ВС. Выявлены их основные достоинства и недостатки. Приведены основные авиационные инциденты, причинами которых послужили аварийные режимы работы ЭТУ ВС.
3. Проведен анализ численных методов, использующихся при решении уравнения теплопроводности. Проведен их сравнительный анализ. Выявлены достоинства и недостатки приведенных методов.
4. **Разработан новый модифицированный метод конечных объемов** (ММКО), который отличается возможностью получения гарантированной точности моделирования поля температур.
5. **Разработана методика автоматического формирования дифференциальных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов**, которая является одним из необходимых этапов ММКО.
6. Разработана компьютерная модель исследуемого объекта с использованием языка программирования Python. Получена динамика распределения температуры при разряде аккумулятора постоянными токами.
7. На основе экспериментальных исследований показана возможность проведения валидации моделей с погрешностью, **не превышающей 3 %**, что позволяет достаточно точно определять диагностируемые критерии.
8. **Разработан метод диагностирования ЛИА на основе их тепловых портретов**. Сформулированы рекомендации по установке точечных температурных датчиков.

9. Проведены исследования влияния коэффициента теплоотдачи на максимальную установившуюся температуру аккумулятора, которые показали, что

– при загрязнении в процессе эксплуатации стенок аккумуляторов, ухудшающих коэффициент теплоотдачи, критическая температура, характеризующая предаварийное состояние может быть достигнута быстрее и при меньших значениях токов;

– при использовании специальных систем охлаждения (продув, жидкостное или испарительное) имеется возможность использовать аккумуляторы при больших токовых нагрузках при сохранении заданного температурного режима;

– при применении мер, направленных на увеличение теплоотдачи, имеется возможность **снизить рабочую температуру до 2,5 раз**, что улучшает условия предотвращения теплового режима.

Список литературы

1. Анализ состояния безопасности полетов в гражданской авиации Российской Федерации в 2020 году, ФАВТ Москва 2021.

2. Анализ состояния безопасности полетов в гражданской авиации Российской Федерации в 2019 году, ФАВТ Москва 2020.

3. Анализ состояния безопасности полетов в гражданской авиации Российской Федерации в 2018 году, ФАВТ Москва 2019.

4. IATA Safety Report 2020, Effective April 1 2021.

5. IATA Safety Report 2019, Effective April 1 2020.

6. Кечин А.В., Левин А.В., Халютин С.П., Жмуров Б.В. Организация энергоснабжения приемников первой категории перспективных воздушных судов гражданской авиации// Научный Вестник МГТУ ГА – 2018. – № 6 (21). – С.54-64.

7. Халютин С.П., Давидов А.О., Жмуров Б.В. Электрические и гибридные самолеты: перспективы создания.//Электричество – 2017. – №9. С.4-16.

8. ГОСТ Р 54073-2017. Системы электроснабжения самолетов и вертолетов.Общие требования и нормы качества электроэнергии. – Введ. 2018-06-01. – М. : Стандартинформ, 2018. – 35 с.

9. Системы электроснабжения воздушных судов [Текст] : учебник / под ред. С.П. Халютина. - М. : ИД Академии Жуковского, 2022, – 572 с.

10. Попов А.Ю. Источники электроэнергии бортовых систем электроснабжения: состояние и перспективы.//Научный журнал КубГАУ – 2017. – № 131 (07). С.1-10.

11. Кудряков, С. А. Анализ состояния и тенденции развития авиационных систем электроснабжения / С. А. Кудряков, К. В. Бунас. — Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2019. – № 40 (278). – С. 19-21

12. Сидоров А.Е., Вагапов Г.В. Электрические машины и электрооборудование предприятий, организаций, учреждений : Учебное пособие – Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, –2013. – 288 с.

13. Халютин С.П. Авиационные электрические машины [Текст] : тексты лекций – М.: ИД Академии Жуковского, –2020. – 160 с.

14. Авиационные электрические машины [Текст] : Учебник для курсантов воен. авиац.-техн. училищ / В.А. Винокуров, А.К. Кустиньш, А.Б. Лебедев, В.И. Прохоров; Под ред. д-ра техн. наук, проф. В. А. Винокурова.– М.: Воениздат, – 1969. – 302 с., 1 л. черт. : ил.; 22 см.

15. Мастяев Н.З. Нагрев и охлаждение электрооборудования летательных аппаратов : учебное пособие/ Н.З. Мастяев, И.Н. Орлов. – М. : Издательсво МЭИ, 1995. – 203 с.

16. ГОСТ 8865-93 Системы электрической изоляции. Оценка нагревостойкости и классификации – Введ. 1995-01-01. – Минск. Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации, 1995. – 5 с.

17. ГОСТ 58593-2019 Источники тока химические. Термины и определения. – Введ. 2019-10-07. – Москва. Стандартинформ, 2019. – 70 с.

18. Синдеев И.М., Савелов А.А. Системы электроснабжения воздушных судов: учебник для вузов – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Транспорт, 1990. – 296 с.

19. Кириллов А.В. Авиационные аккумуляторные батареи : учебное пособие/ А.В. Кириллов, М.А. Ковалёв, В.И.Соловьев. – Самара: Из-во Самарского университета, –2020. –80 с.

20. Соколов О.А., Мелихов И.П. Применение авиационных аккумуляторных батарей// Аллея науки. –2023, Т.1, № 10(85). С. 209-2019. – EDN WWAZBP.

21. Кириллов А.В. Эксплуатация авиационных аккумуляторных батарей: учебное пособие/ А.В. Кириллов, М.А. Ковалёв, В.И.Соловьев. – Самара: Из-во Самарского университета, –2021. –84 с.

22. Горшкова В.М., Харитоненко В.К., Малахов К.М. О химических источниках тока и аккумуляторах./В.М. Горшкова, В.К. Харитоненко, К.М. Малахов, В.В. Хаустов, А.И. Карнюшин//Известия юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2017. – Т.7. –№ 3(24). С.116-127.

23. Карпусь А.И., Филатов С.А., Абрамова О.Ю. Анализ особенностей эксплуатации литий-ионных аккумуляторов//Вестник НИЦ Военной академии ра-

кетных войск стратегического назначения им. Петра Великого – 2021. –№ 3. С.22-24.

24. Клименко Г.К., Ляпин А.А., Марахтанов М.К. Исследование теплового состояния аккумулятора в рабочем цикле. Инженерный журнал: наука и инновации, –2013. – № 10, URL: http://engjournal.ru/catalog/machin/plasma/1030.html (дата обращения: 01.11.2022)

25. Красношлыков А.С.,Кузнецов Г.В. Численный анализ температурных полей литий-ионного аккумулятора в условиях высоких токовых нагрузок. //Проблемы энергетики – 2017. – № 11-12 (19). С.126-134.

26. Старостин И.Е., Давидов А.О., Левин А.В. Моделирование возможных динамик физико-химических процессов в литий-ионных аккумуляторах.//Труды международного симпозиума "Надежность и качество" – 2018. – Т.2. С.394-398.

27. Aiello L. Influence of Pressure, Temperature and Discharge Rate on the Electrical Performances of a Commercial Pouch Li-Ion Battery /L. Aiello, P. Ruchti, S. Vitzhum, F. Coren //Batteries. – 2024. no.10. P.72. DOI: 10.3390/batteries10030072.

28. Li W. A Novel Quick Temperature Prediction Algorithm for Battery Thermal Management Systems Based on a Flat Heat Pipe /W. Li, Y. Xie, W. Li, Y. Wang, D. Dan, Y. Qian, Y. Zhang //Batteries. – 2024. no.10. P.19. DOI: 10.3390/batteries10010019.

29. Каменев Ю.Б., Киселевич А.В., Леонов В.Н. Анализ факторов, влияющих на нагрев свинцово-кислотного аккумулятора.//Электрохимическая энергетика – 2008. – Т.2. – №3. С.140-145.

30. Медведев В.А. Конструирование преобразователей : электронное учебное пособие/ В.А. Медведев – Тольятти: Из-во ТГУ, –2015. –159 с.

31. Славик И. Конструирование силовых полупроводниковых преобразователей : перевод с чешск./ – М.: Энергоатомиздат, –1989. –222 с.: ил.

32. Черкасов В.Н. Пожарная безопасность электроустановок : учебник / В.Н. Черкасов, Н.П. Костарев – М.: Академия ГПС МЧС России, –2002. –377 с.: ил.

33. Смелков Г.И. Проблемы пожарной безопасности режима теплового разгона в литиевых аккумуляторных батареях / Г.И Смелков, В.А. Пехотиков, Г.В.

Боков, А.А. Назаров // Пожарная безопасность. –2022. – №4 (109). С.73-79. -DOI: 10.37657/vniipo.pb.2022.109.4.008. – EDN QZJJOT.

34. Харламенков А.С. Пожарная опасность применения литий-ионных аккумуляторов в России. //Пожаровзрывобезопасность. Fire and Explosion Safety. – 2022. – Т.31, С.96-102.

35. Келлер М.В., Савенко А.Е. Оценка, наблюдение и обеспечение безопасности при термическом нагреве для литий-ионных аккумуляторов //Вестник Керченского государственного морского технологического университета. Серия: Морские технологии. –2023. – № 1, С.23-31. – EDN EFWXSC.

36. Галушкин Н.Е., Язвинская Н.Н., Галушкин Д.Н. Тепловой разгон в никель-кадмиевых аккумуляторах с металлокерамическими и прессованными электродами.//Электрохимическая энергетика – 2012. – Т.12. – №1. С.42-45.

37. Галушкин Н.Е., Язвинская Н.Н., Галушкин Д.Н. Исследование причин теплового разгона в герметичных никель-кадмиевых аккумуляторах. //Электрохимическая энергетика – 2012. – Т.12. – №4. С.208-211.

38. Язвинская Н.Н., Галушкин Д.Н., Галушкин Н.Е. Эмпирическое моделирование теплового разгона в никель-кадмиевых аккумуляторах.//Известия вузов. Северо-кавказский регион. Технические науки – 2018. – №1. С.121-126.

39. Язвинская Н.Н. Исследование теплового разгона в литий-ионных аккумуляторах.//Известия вузов. Северо-кавказский регион. Технические науки – 2020. – №2. С.89-95.

40. Kafadarova N. A System for Determining the Surface Temperature of Cylindrical Lithium-Ion Batteries Using a Thermal Imaging /N. Kafadarova, S. Sotirov, F. Herbst, A. Stoynova, S. Rizanov // Batteries. –2023. no.9. P. 519 DOI: 10.3390/batteries9100519.

41. Helena Chiang. Multi-Level Forensic and Functional Analysis of 787 Main/APU Lithium Ion Battery / Helena Chiang, Dennis Grzic, Alvin Wu // Corporate Research Underwriters Laboratories Inc. –2014. May 28.

42. Zhang H. Battery Temperature Prediction Using an Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System. / H. Zhang, A. Fotouhi, D.J. Auger, M. Lower // Batteries. –2024. no.10. P. 25 DOI: 10.3390/batteries10030085.

43. Wang X. Effects of Different Charging Currents and Temperatures on the Voltage Plateau Behavior of Li-Ion Batteries /X. Wang, Y. Zhang, Y. Deng, Y. Yuan, F. Zhang, S. Lv, Y. Zhu, H. Ni // Batteries. –2023. no.9. P. 42 DOI: 10.3390/batteries9010042.

44. Spitthoff L., Burheim O.S., Shearing P.R. Temperature, Ageing and Thermal Management of Lithium-Ion Batteries // Energies. –2021. no.14(5). P. 1248 DOI: 10.3390/en14051248.

45. Kong D. Numerical Investigation of Thermal Runaway Behavior of Lithium-Ion Batteries with Different Battery Materials and Heating Conditions /D. Kong, W. Gongquan, P. Ping, J. Wen // Applied Thermal Engineering. –2021. no.189(7). P. 116661 DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2021.116661.

46. Галушкин Д.Н. Тепловой разгон в щелочных аккумуляторах : монография / Д.Н. Галушкин, Ф.И. Кукоз, Н.Н. Галушкина – Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, –2006. –123 с.

47. Takahisa Ohsaki, Takashi Kishi, Takashi Kuboki, Norino Takami, Nao Shimura, Yuichi Sato, Masahiro, Asako Satoh. Overcharge reaction of lithium-ion batteries // Journal of Power Sources. –2005. –V/146, Is/1/2/ –P.97-100.

48. Приказ Росавиации №33 от 03.02.2011 О серьезном инцинденте с самолетом Ту-154М RA-85684

49. ГОСТ Р 55255-2012 Система технического обслуживания и ремонта авиационной техники. Организация работ по диагностике технического состояния авиационой техники – Введ. 2013-07-01. – М. Стандартинформ, 2014. – 18 с.

50. Капустин А.Г., Карачун О.Г. Особенности формирования алгоритма диагностирования систем электроснабжения современных воздушных судов.//Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. Энергетика – 2020. – №1. С.56-63.

51. Кудряков С.А. Анализ состояния и тенденции развития авиационных систем электроснабжения //Молодой ученый. – 2019. – № 40 (278). С.19-21. URL: https://moluch.ru/archive/278/62848/ (дата обращения: 13.05.2024).

52. Левин А. В. Тенденции и перспективы развития авиационного электрооборудования /А. В. Левин, С. П. Халютин, Б. В. Жмуров //Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2015. – № 213 (3). С.50-57. EDN TONRUV.

53. Арзамасцева В.А., Сагитов Д.И. Тенденции и перспективы развития авиационного электрооборудования //Достижения науки и образования. – 2024. – № 2 (93). С.4-6. – EDN BGKMBN.

54. Халютин С. П. Электрификация летательных аппаратов - от ПЕ-2 до полностью электрического самолета. Направления исследовани //Электропитание. – 2018. – № 4. С.4-26. – EDN RCYKLD.

55. Халютин С. П. Электрический самолет: прошлое, настоящее, будущее //Авиапанорама: Международный авиационно-космический журнал. – 2016. – № 6 (120). С.42. – EDN YTVAIH.

56. Давидов А.О., Халютин С.П. Оценка удельных свойств энергосистем самолетов на электрической тяге //Электропитание. – 2019. – № 2. С.43-54. – EDN CVDRYR.

57. Шестерикова Д. С., Оброкова Е.И., Григорьева М.Д. Тенденции развития летательных аппаратов на электрической тяге //XXV Туполевские чтения (школа молодых ученых): Международная молодежная научная конференция, посвященная 60-летию со дня осуществления Первого полета человека в космическое пространство и 90-летию Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева-КАИ, Казань, 10–11 ноября 2021 года. Т. IV. – Казань : Изд-во ИП Сагиева А.Р., – 2021. С.384-390. – EDN CVDRYR.

58. Schefer H., Mallwitz R., Fauth L. Discussion on Electric Power Supply Systems for All Electric Aircraft//// IEEE Access. –2020. V.8. P.84188-84216. DOI10.1109/ACCESS.2020.2991804. – EDN IBOOUU.

59. Машошин О.Ф. Диагностика авиационной техники : учебное пособие / О.Ф. Машошин – М.: МГТУ ГА, –2007. –141 с.

60. Воробьев В.Г. Надежность и техническая диагностика авиационного оборудования : Учебник / В.Г. Воробьев, В.Д. Константинов – М.: МГТУ ГА, –2010. –448 с.

61. Воробьев В.Г. Диагностирование и прогнозирование технического состояния авиационного оборудования : Учебное пособие для вузов гражданской авиации / В.Г. Воробьев, В.В. Глухов, Ю.В. Козлов – М.: Транспорт, – 1984. – 191 с.

62. Саидумаров И.М., Умаров А.А., Закиров Р. Анализ возможностей централизованной системы встроенного контроля и диагностики для дистанционного контроля параметров воздушных судов.//World Science – 2016. – №5(9). С.79-82.

63. Саидумаров И.М., Умаров А.А. Системы встроенного контроля для интегрированного комплекса авионики./Технические науки в России и за рубежом: материалы V Междунар.научн.конф. – 2016. С.15-17.

64. Халютин С. П. Система распределения электроэнергии воздушных судов - центр диагностирования и прогнозирования состояния авиационного электрооборудования./Электропитание.// – 2020. № 2, С.4-14. – EDN ITHFKA.

65. Пястолов А.П., Сагитов Д.И. Анализ систем контроля авиационного оборудования/Известия Тульского государственного университета. Технические науки. // – 2023. № 11, С.697-703. – DOI 10.24412/2071-6168-2023-11-697-698. – EDN FEZLIS.

66. Фимушин А.С., Славинский А.С., Капустин А.В. Цифровые технологии в вопросах контроля и прогнозирования технического состояния авиационной техники Актуальные проблемы и перспективы развития гражданской авиации: сборник трудов XII Международной научно-практической конференции, посвященной празднованию 100-летия отечественной гражданской авиации, Иркутск, 12-13 октября 2023 года.// – Иркутск : Московский государственный технический университет гражданской авиации. –2023. С.170-175. - EDN JXZJPX.

67. Подловкин Е.А., Лебедев В.В. Некоторые особенности использования термопар для измерения температуры.//Актуальные проблемы энергетики – 2016

[Электронный ресурс]: материалы научно-технической конференции студентов и аспирантов URL: https://rep.bntu.by/handle/data/35084 (дата обращения: 03.11.2022) – Минск: БНТУ – 2017. С.470-474.

68. Брякин И.В., Бочкарев И.В.,Багиев Х.Г., Келебаев К.К. Контроль температуры обмоток и защита от перегрева электрических машин переменного тока.//Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика – 2019. – №1 (19). С.75-84.

69. Попов Ю.В. Инфракрасная диагностика системы электроснабжения воздушного судна.//Научный вестник ГосНИИ ГА. – 2014. – №5. С.78-84.

70. Elena A. Punt, Sergey P. Khalyutin, Albert O. Davidov. Analysis of Tasks of Forming Thermal Imaging of Electrical Devices.//IEEE 2020 1st International Conference Problems of Informatics, Electronics, and Radio Engineering (PIERE). Jan. – 2021 [Online]. https://ieeexplore.ieee.org/xpl/conhome/9314358/

71. Крайнов А.Ю., Моисеева, К.М. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие/ А.Ю. Крайнов, К.М. Моисеева – Томск: STT, –2016. –44 с.

72. Карпович Д.С., Суша О.Н., Коровкина Н.П., Кобринец В.П. Аналитический и численный метод решения уравнения теплопроводности//Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика – Минск: – №6 –2015. С. 122-127.

73. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности : учебное пособие/ Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет – Томск: Из-во ТПУ, –2007. –172 с.

74. Аникеев А.А. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики: учебное пособие/ А.А. Аникеев, А.М. Молчанов, Д.С. Янышев – Москва: Из-во URSS: [ЛИБРОКОМ], –2010. –149 с.

75. Сиковский Д.Ф. Методы вычислительной теплофизики: учебное пособие/ Д.Ф. Сиковский – Новосибирск: Из-во НГТУ, –2013. –98 с.

76. Brucherseifer E., Fay A. Digital Twins.//DE Gruyter oldenbourg. Automatisierungstechnik. –2021. –№69 (12). pp. 1023-1025.

77. Халютин С.П., Старостин И.Е., Давидов А.О., Харьков В.П., Жмуров Б.В. Цифровые двойники в теории и практике авиационной электроэнергетики. // Электричество –2022. – № 10. С. 4-13.

78. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development.//Energies – 2023. –№16 (4).

79. Старостин И.Е., Халютин С.П., Париевский В.В. Виды и формы представления основных уравнений метода математического прототипирования энергетических //Электропитание. –2022. – № 4. С. 4-14. EDN JZJPBQ.

80. Старостин И.Е., Халютин С.П. Виды и формы представления основных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов //XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023): Материалы мультиконференции. В 4-х томах, Волгоград, 11–15 сентября 2023 года. /Редколлегия: И.А. Каляев, В.Г. Пешехонов, С.Ю. Желтов [и др.]. Том 3. – Волгоград: Волгоградский государственный технический университет. –2023. С. 80-82. EDN SHGVUW.

81. Халютин С.П., Старостин И.Е., Давидов А.О., Харьков В.П. Обобщенный метод математического прототипирования энергетических процессов. Задачи управления.//Управление в аэрокосмических системах (УАКС-2022) им. Академика Е.А. Микрина. Материалы 15-ой мультиконференции по проблемам управления –2022. С. 7-10.

82. Khalyutin S.P. Formation of Thermal Portraits of Electrical Devices Based on the Finite Element Method/ E. A. Punt, S. P.Khalyutin//International Conference of Young Specialists on Micro/Nanotechnologies and Electron Devices, EDM : 22, Aya, Altai Region, 30 июня – 04 2021 года. – Aya, Altai Region, – 2021. P. 310-314. – DOI 10.1109/EDM52169.2021.9507697. –EDN JXMSGM.

83. Punt E.A., Khalyutin S.P., Starostin I.E. Formation of Digital Thermal Portraits of Lithium-Ion Accumulator Based on Modified Method of Final Volumes.//23rd International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM) –2022. С.

84. Punt E.A., Khalyutin S.P., Troshin M.O, Starostin I.E. Modified Finite Volume Method Study For Numerical Calculation Of Lithium Battery Temperature.//24th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM) –2023. C.

85. Исследование температурных режимов бортовых электротехнических устройств с учетом их режимов работы [Текст] : отчет по НИР/ МГТУ ГА рук. С.П. Халютин; исполн.: Е.А. Пунт. – М. 2021. – 54 с. – Рег. N НИОКТР АААА-А20-120070990049-9

86. Маркировка и расшифровка аккумуляторов 18650 [Электронный ресурс] URL: https://virtustec.ru/news/18650/markirovka-i-rasshifrovka-akkumulyatorov-18650/ (Дата обращения 13.05.2024).

87. NTC термисторы B57164K для измерения температуры [Электронный ресурс] URL: https://www.platan.ru/catalog/article/B57164K-TDK (Дата обращения 13.05.2024).

88. Сластихина М. Д., Абрамян А. А. Параметры, принцип работы и использование Ntc-термисторов // . 2023. №19 (117). URL: https://scilead.ru/article/4460-parametri-printsip-raboti-i-ispolzovanie-ntc-

89. Программирование на Python для начинающих : [перевод с англ. М.А. Райтмана]/ Майк МакГрат. –Москва : Эксмо, 2015. – 192 с.

90. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024660805 Российская Федерация. Программа формирования системы дифференциальных уравнений в процессе деления объемов в модифицированном методе конечных объемов : № 2024619534 : заявл. 27.04.2024 : опубл. 13.05.2024 / Е. А. Пунт. – EDN LADAWG.

91. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024662400 Российская Федерация. Программа расчета динамики распределения температур литийионного аккумулятора с учетом заданной точности для модифицированного метода конечных объемов : № 2024661329 : заявл. 16.05.2024 : опубл. 28.05.2024 / Е. А. Пунт.

92. Пунт Е.А. Алгоритм синтеза уравнений теплопроводности литийионного аккумулятора для конечных объемов при делении. Научный вестник МГТУ ГА. 2024 ; 27(4) : 50-62. https://doi.org/10.26467/2079-0619-2024-27-4-50-62

Приложение 1

```
import numpy as np #
import pandas as pd #
import plotly.express as px #
import matplotlib.pyplot as plt #
from sympy import * #
from IPython.display import clear_output
import json

Time = 0
a = 12
id_m =0 #-
id_m =1 #-
id_m =2 #-
id_m =3 #-
res1=0 #
matrix_i_j_m=np.array([[71,5,5,1],[5,10,5,1],[5,5,200,1],[1,1,1,0.26]]) #
"""                              XY
    """


def square_xy(obj_1, obj_2):
    xx_min = 0
    xx_max = 0
    yy_min = 0
    yy_max = 0
    if obj_1.z_min == obj_2.z_max or obj_1.z_max == obj_2.z_min:
```

```
        if obj_1.x_min < obj_2.x_min:
            if obj_1.x_max > obj_2.x_max:
                xx_min = obj_2.x_min
                xx_max = obj_2.x_max
            elif obj_1.x_max <= obj_2.x_min:
                xx_min = obj_1.x_max
                xx_max = obj_1.x_max
            elif obj_1.x_max > obj_2.x_min:
                xx_min = obj_2.x_min
                xx_max = obj_1.x_max
        elif obj_1.x_min >= obj_2.x_min:
            if obj_1.x_max < obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_1.x_max
            elif obj_1.x_min > obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_1.x_min
            elif obj_1.x_min < obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_2.x_max
        if obj_1.y_min < obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_2.y_max
            elif obj_1.y_max <= obj_2.y_min:
                yy_min = obj_1.y_max
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_max > obj_2.y_min:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
```

```
        elif obj_1.y_min >= obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_min > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_min
            elif obj_1.y_min < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_2.y_max
        return (xx_max - xx_min) * (yy_max - yy_min)
    else:
        return 0


def square_zy(obj_1, obj_2):
    zz_min = 0
    zz_max = 0
    yy_min = 0
    yy_max = 0
    if obj_1.x_min == obj_2.x_max or obj_1.x_max == obj_2.x_min:
        if obj_1.z_min < obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_2.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
            elif obj_1.z_max <= obj_2.z_min:
                zz_min = obj_1.z_max
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_max > obj_2.z_min:
                zz_min = obj_2.z_min
```

```
                zz_max = obj_1.z_max
        elif obj_1.z_min >= obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max < obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_min > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_min
            elif obj_1.z_min < obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
        if obj_1.y_min < obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_2.y_max
            elif obj_1.y_max <= obj_2.y_min:
                yy_min = obj_1.y_max
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_max > obj_2.y_min:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
        elif obj_1.y_min >= obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_min > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_min
            elif obj_1.y_min < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
```

```
                yy_max = obj_2.y_max
        return (zz_max - zz_min) * (yy_max - yy_min)
    else:
        return 0


def square_zx(obj_1, obj_2):
    zz_min = 0
    zz_max = 0
    xx_min = 0
    xx_max = 0
    if obj_1.y_min == obj_2.y_max or obj_1.y_max == obj_2.y_min:
        if obj_1.z_min < obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_2.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
            elif obj_1.z_max <= obj_2.z_min:
                zz_min = obj_1.z_max
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_max > obj_2.z_min:
                zz_min = obj_2.z_min
                zz_max = obj_1.z_max
        elif obj_1.z_min >= obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max < obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_min > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_min
            elif obj_1.z_min < obj_2.z_max:
```

```
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
        if obj_1.x_min < obj_2.x_min:
            if obj_1.x_max > obj_2.x_max:
                xx_min = obj_2.x_min
                xx_max = obj_2.x_max
            elif obj_1.x_max <= obj_2.x_min:
                xx_min = obj_1.x_max
                xx_max = obj_1.x_max
            elif obj_1.x_max > obj_2.x_min:
                xx_min = obj_2.x_min
                xx_max = obj_1.x_max
        elif obj_1.x_min >= obj_2.x_min:
            if obj_1.x_max < obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_1.x_max
            elif obj_1.x_min > obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_1.x_min
            elif obj_1.x_min < obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_2.x_max
        return (zz_max - zz_min) * (xx_max - xx_min)
    else:
        return 0


class Devision:
    """                         -
        return -
```

```
    """

    def __init__(self, cord, obj_V, ind_obj):
        self.cord = cord
        self.obj_V = obj_V
        self.ind_obj = ind_obj
        self.dev(line=self.cord)

    def calc_v(self):  #
        return (self.x_max - self.x_min) * (self.y_max - self.y_min) * (self.z_max - self.z_min)

    def mass(self):  #
        return self.calc_v() * self.rho

    def dev_x(self):  #                  X
        obj_1 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.mean_x(),
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        obj_2 = FinVol(
            self.obj_V.mean_x(), self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
```

```
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        all_obj = []
        all_obj.append(obj_1)
        all_obj.append(obj_2)

        BAT.pop(self.ind_obj)  #
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[0])  #                -1
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[1])  #                -2

    def dev_z(self):  #                  Z
        obj_1 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.mean_z(),
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C,
             ↪  self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        obj_2 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.mean_z(), self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C,
             ↪  self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        all_obj = []
        all_obj.append(obj_1)
        all_obj.append(obj_2)
```

```python

        BAT.pop(self.ind_obj)
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[0])
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[1])

    def dev_y(self):  #                  Y
        obj_1 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.mean_y(),
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        obj_2 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.mean_y(), self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        all_obj = []
        all_obj.append(obj_1)
        all_obj.append(obj_2)

        BAT.pop(self.ind_obj)
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[0])
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[1])

```

```
    def dev(self, line):
        """                          """
        if line == 1:  #   X
            self.dev_x()
        elif line == 2:  #   Y
            self.dev_y()
        elif line == 3:  #   Z
            self.dev_z()


class FinVol:
    def __init__(self, x_min, x_max, y_min, y_max, z_min, z_max,
    ↪ rho,  , C, rhoR, id_m, j_ix, j_iy, j_iz):
        self.x_min = x_min
        self.x_max = x_max
        self.y_min = y_min
        self.y_max = y_max
        self.z_min = z_min
        self.z_max = z_max
        self.rho = rho  #
        self.  =   #
        self.C = C  #
        self.rhoR = rhoR
        self.id_m = id_m
        self.j_ix = j_ix  #
        self.j_iy = j_iy  #
        self.j_iz = j_iz  #
        self.T_vol = 20  #

    def __str__(self):
```

```
        return f"x_min - {self.x_min} x_max - {self.x_max} y_min - {self.y_min} y_max - {self.y_max} z_min - {self.z_min} z_max - {self.z_max}\n"

    def mean_x(self):  #
        return (self.x_max + self.x_min) / 2

    def mean_y(self):
        return (self.y_max + self.y_min) / 2

    def mean_z(self):
        return (self.z_max + self.z_min) / 2

    def mean_x_y_z(self):
        return [self.mean_x(), self.mean_y(), self.mean_z()]
"""    json """
with open("BAT_base.json", "r") as read_file:
    data = json.load(read_file)
"""      BAT   json """
BAT = []
for key, val in data.items():
    BAT.append(
        FinVol(x_min=val.get("x_min"),
               x_max=val.get("x_max"),
               y_min=val.get("y_min"),
               y_max=val.get("y_max"),
               z_min=val.get("z_min"),
               z_max=val.get("z_max"),
               rho=val.get("rho"),
                =val.get(" "),
```

```
                    C=val.get("C"),
                    rhoR=val.get("rhoR"),
                    id_m=val.get("id_m"),
                    j_ix=val.get("j_ix"),
                    j_iy=val.get("j_iy"),
                    j_iz=val.get("j_iz")))


def TOTAL_CALC_Q(BAT):
    matrix_zy = []
    for i in range(len(BAT)):
        mini_lst = []
        for j in range(len(BAT)):
            if i == j:
                mini_lst.append(0)
            else:
                mini_lst.append(square_zy(BAT[i], BAT[j]))
        matrix_zy.append(mini_lst)

    matrix_zx = []
    for i in range(len(BAT)):
        mini_lst = []
        for j in range(len(BAT)):
            if i == j:
                mini_lst.append(0)
            else:
                mini_lst.append(square_zx(BAT[i], BAT[j]))
        matrix_zx.append(mini_lst)

    matrix_xy = []
```

```
    for i in range(len(BAT)):
        mini_lst = []
        for j in range(len(BAT)):
            if i == j:
                mini_lst.append(0)
            else:
                mini_lst.append(square_xy(BAT[i], BAT[j]))
        matrix_xy.append(mini_lst)

    def X_min():
        xx_min = 0
        for elem in BAT:
            if elem.x_min < xx_min:
                xx_min = elem.x_min
        return xx_min

    def X_max():
        xx_max = 0
        for elem in BAT:
            if elem.x_max > xx_max:
                xx_max = elem.x_max
        return xx_max

    def Y_min():
        yy_min = 0
        for elem in BAT:
            if elem.y_min < yy_min:
                yy_min = elem.y_min
        return yy_min
```

```
def Y_max():
    yy_max = 0
    for elem in BAT:
        if elem.y_max > yy_max:
            yy_max = elem.y_max
    return yy_max

def Z_min():
    zz_min = 0
    for elem in BAT:
        if elem.z_min < zz_min:
            zz_min = elem.z_min
    return zz_min

def Z_max():
    zz_max = 0
    for elem in BAT:
        if elem.z_max > zz_max:
            zz_max = elem.z_max
    return zz_max

"                     _           "
matrix_m = []

for i in range(len(BAT)):
    mini_lst = []
    for j in range(len(BAT)):
        if i == j:
            mini_lst.append(BAT[i]. )
        else:
```

```
            ↪  mini_lst.append(matrix_i_j_m[BAT[i].id_m][BAT[j].id
        matrix_m.append(mini_lst)

    matrix_lambda = []
    """                              """
    for i in range(len(BAT)):
        mini_lst = []
        q = 0
        for j in range(len(BAT)):
            if matrix_zy[i][j] != 0:
                mini_lst.append(matrix_m[i][j] * matrix_zy[i][j])
                q = q - matrix_m[i][j] * matrix_zy[i][j]
            elif matrix_zx[i][j] != 0:
                mini_lst.append(matrix_m[i][j] * matrix_zx[i][j])
                q = q - matrix_m[i][j] * matrix_zx[i][j]
            elif matrix_xy[i][j] != 0:
                mini_lst.append(matrix_m[i][j] * matrix_xy[i][j])
                q = q - matrix_m[i][j] * matrix_xy[i][j]
            else:
                mini_lst.append(0)
        mini_lst.insert(i, q)  #
        mini_lst.pop(i + 1)  #                      i+1
        matrix_lambda.append(mini_lst)

    """
          01
    """
```

```
def square_0(obj_1):  # .
    xx_min = 0
    xx_max = 0
    yy_min = 0
    yy_max = 1
    X0_min = X_min()
    X0_max = X_max()
    Y0_min = Y_min()
    Y0_max = Y_max()
    Z0_min = Z_min()
    Z0_max = Z_max()
    nnn = 0
    S = 0
    if obj_1.z_max == Z0_max:
        S = (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.z_min == Z0_min:
        S = S + (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.y_max == Y0_max:
        S = S + (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.y_min == Y0_min:
        S = S + (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
```

```
        if obj_1.x_max == X0_max:
            S = S + (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
            nnn = nnn + 1
        if obj_1.x_min == X0_min:
            S = S + (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
            nnn = nnn + 1
        return S

    "                         Y"
    #     rhoR=0.07
    matrix_I_y = np.matrix([[(BAT[i].j_iy ** 2) * (BAT[i].x_max - BAT[i].x_min) * (BAT[i].z_max - BAT[i].z_min) * BAT[
        i].rhoR * (BAT[i].y_max - BAT[i].y_min)] for i in range(len(BAT))])

    "                         Z"
    #     rhoR=1.6e-7
    matrix_I_z = np.matrix([[(BAT[i].j_iz ** 2) * (BAT[i].x_max - BAT[i].x_min) * (BAT[i].y_max - BAT[i].y_min) * BAT[
        i].rhoR * (BAT[i].z_max - BAT[i].z_min)] for i in range(len(BAT))])

    "                         X"
    #     rhoR=3.2e-6
    matrix_I_x = np.matrix([[(BAT[i].j_ix ** 2) * (BAT[i].z_max - BAT[i].z_min) * (BAT[i].y_max - BAT[i].y_min) * BAT[
        i].rhoR * (BAT[i].x_max - BAT[i].x_min)] for i in range(len(BAT))])
```

```
"         "
result = matrix_I_z + matrix_I_x + matrix_I_y

"                              "
Temperature = np.matrix([[elem.T_vol] for elem in BAT])

"              T01       "
T01 = np.matrix([[square_0(elem)] for elem in BAT])

"""              T01              """
T01D = list()
for i in range(len(T01)):
    prom = []
    for j in range(len(T01)):
        if i == j:
            prom.append(np.array(T01[i])[0][0])
        else:
            prom.append(0)
    T01D.append(prom)

T01D = np.matrix(T01D)

"""              matrix_lambda -
↪       """
matrix_lambda = matrix_lambda - T01D

"""    _                       """
Q = -1 * np.linalg.inv(matrix_lambda).dot(result + T01 * (40))
# print(Q)
```

```
    x_coordinats = list()
    X_min = list()
    X_max = list()
    Y_min = list()
    Y_max = list()
    Z_min = list()
    Z_max = list()
    for i in range(len(BAT)):
        res = (BAT[i].x_max + BAT[i].x_min) / 2
        x_coordinats.append(res)
        x_min = BAT[i].x_min
        x_max = BAT[i].x_max
        y_min = BAT[i].y_min
        y_max = BAT[i].y_max
        z_min = BAT[i].z_min
        z_max = BAT[i].z_max
        X_min.append(x_min)
        X_max.append(x_max)
        Y_min.append(y_min)
        Y_max.append(y_max)
        Z_min.append(z_min)
        Z_max.append(z_max)
    return Q
epsilon = 3
count_cycle = 0
ind = 0
Q = None

print("\n      X")
while True:
```

```
    try:
        Devision(1, BAT[ind], ind)
        Q = TOTAL_CALC_Q(BAT=BAT)
        print(f"\n     {count_cycle}.          Q {len(Q)}.        BAT {len(BAT)}")
        if abs(Q[ind] - Q[ind + 1]) < epsilon:
            ind += 2
        count_cycle += 1
        print(abs(Q[ind] - Q[ind + 1])-epsilon)
    except IndexError:
        print("              ")
        break
print(Q)
ind = 0
print("\n     Y")
while True:
    try:
        Devision(2, BAT[ind], ind)
        Q = TOTAL_CALC_Q(BAT=BAT)
        print(f"\n     {count_cycle}.          Q {len(Q)}.        BAT {len(BAT)}")
        if abs(Q[ind] - Q[ind + 1]) < epsilon:
            ind += 2
        count_cycle += 1
        print(abs(Q[ind] - Q[ind + 1])-epsilon)
    except IndexError:
        print("              ")
        break
print(Q)
ind = 0
```

```
print("\n      Z")
while True:
    try:
        Devision(3, BAT[ind], ind)
        Q = TOTAL_CALC_Q(BAT=BAT)
        print(f"\n     {count_cycle}.          Q {len(Q)}.
        ↪        BAT {len(BAT)}")
        if abs(Q[ind] - Q[ind + 1]) < epsilon:
            ind += 2
        count_cycle += 1
        print(abs(Q[ind] - Q[ind + 1])-epsilon)
    except IndexError:
        print("             ")
        break
print(Q)
Q_list = list(Q)
y_s = 0.026
z_s = 0.0326
# x_s = 0.0566
# z_s = 0.0326
new_BAT = list()
new_Q = list()

for i, elem in enumerate(BAT):
    if elem.y_min < y_s and elem.y_max > y_s and elem.z_min < z_s
    ↪ and elem.z_max > z_s:
    # if elem.x_min < x_s and elem.x_max > x_s and elem.z_min <
    ↪ z_s and elem.z_max > z_s:
        new_BAT.append(elem)
        new_Q.append(Q[i])
```

```
"""     DF                   excel"""
info_for_ex = {
    "Mean_X": [],
    "Temperature": [],
    "x_min": [],
    "x_max": [],
    "y_min": [],
    "y_max": [],
    "z_min": [],
    "z_max": []

}

for obj in range(len(new_BAT)):
    cur_Q = float(new_Q[obj])
    cur_BAT = new_BAT[obj]
    print(cur_Q, cur_BAT)
    info_for_ex["Mean_X"].append(cur_BAT.mean_x())
    info_for_ex["Temperature"].append(cur_Q)
    info_for_ex["x_min"].append(cur_BAT.x_min)
    info_for_ex["x_max"].append(cur_BAT.x_max)
    info_for_ex["y_min"].append(cur_BAT.y_min)
    info_for_ex["y_max"].append(cur_BAT.y_max)
    info_for_ex["z_min"].append(cur_BAT.z_min)
    info_for_ex["z_max"].append(cur_BAT.z_max)

df = pd.DataFrame(info_for_ex)
df.to_excel("output.xlsx")
```

Приложение 2

```python
import numpy as np #
import pandas as pd #
import plotly.express as px #
import matplotlib.pyplot as plt #
from sympy import * #
from IPython.display import clear_output
import json

Time = 0
a = 12
id_m =0 #-
id_m =1 #-
id_m =2 #-
id_m =3 #-
res1=0 #
matrix_i_j_m=np.array([[71,5,5,1],[5,10,5,1],[5,5,200,1],[1,1,1,0.26]]) #
"""                                 XY
    """


def square_xy(obj_1, obj_2):
    xx_min = 0
    xx_max = 0
    yy_min = 0
    yy_max = 0
    if obj_1.z_min == obj_2.z_max or obj_1.z_max == obj_2.z_min:
```

```
        if obj_1.x_min < obj_2.x_min:
            if obj_1.x_max > obj_2.x_max:
                xx_min = obj_2.x_min
                xx_max = obj_2.x_max
            elif obj_1.x_max <= obj_2.x_min:
                xx_min = obj_1.x_max
                xx_max = obj_1.x_max
            elif obj_1.x_max > obj_2.x_min:
                xx_min = obj_2.x_min
                xx_max = obj_1.x_max
        elif obj_1.x_min >= obj_2.x_min:
            if obj_1.x_max < obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_1.x_max
            elif obj_1.x_min > obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_1.x_min
            elif obj_1.x_min < obj_2.x_max:
                xx_min = obj_1.x_min
                xx_max = obj_2.x_max
        if obj_1.y_min < obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_2.y_max
            elif obj_1.y_max <= obj_2.y_min:
                yy_min = obj_1.y_max
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_max > obj_2.y_min:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
```

```
        elif obj_1.y_min >= obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_min > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_min
            elif obj_1.y_min < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_2.y_max
        return (xx_max - xx_min) * (yy_max - yy_min)
    else:
        return 0


def square_zy(obj_1, obj_2):
    zz_min = 0
    zz_max = 0
    yy_min = 0
    yy_max = 0
    if obj_1.x_min == obj_2.x_max or obj_1.x_max == obj_2.x_min:
        if obj_1.z_min < obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_2.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
            elif obj_1.z_max <= obj_2.z_min:
                zz_min = obj_1.z_max
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_max > obj_2.z_min:
                zz_min = obj_2.z_min
```

```
                zz_max = obj_1.z_max
        elif obj_1.z_min >= obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max < obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_min > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_min
            elif obj_1.z_min < obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
        if obj_1.y_min < obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_2.y_max
            elif obj_1.y_max <= obj_2.y_min:
                yy_min = obj_1.y_max
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_max > obj_2.y_min:
                yy_min = obj_2.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
        elif obj_1.y_min >= obj_2.y_min:
            if obj_1.y_max < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_max
            elif obj_1.y_min > obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
                yy_max = obj_1.y_min
            elif obj_1.y_min < obj_2.y_max:
                yy_min = obj_1.y_min
```

```
                yy_max = obj_2.y_max
        return (zz_max - zz_min) * (yy_max - yy_min)
    else:
        return 0


def square_zx(obj_1, obj_2):
    zz_min = 0
    zz_max = 0
    xx_min = 0
    xx_max = 0
    if obj_1.y_min == obj_2.y_max or obj_1.y_max == obj_2.y_min:
        if obj_1.z_min < obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_2.z_min
                zz_max = obj_2.z_max
            elif obj_1.z_max <= obj_2.z_min:
                zz_min = obj_1.z_max
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_max > obj_2.z_min:
                zz_min = obj_2.z_min
                zz_max = obj_1.z_max
        elif obj_1.z_min >= obj_2.z_min:
            if obj_1.z_max < obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_max
            elif obj_1.z_min > obj_2.z_max:
                zz_min = obj_1.z_min
                zz_max = obj_1.z_min
            elif obj_1.z_min < obj_2.z_max:
```

```
            zz_min = obj_1.z_min
            zz_max = obj_2.z_max
    if obj_1.x_min < obj_2.x_min:
        if obj_1.x_max > obj_2.x_max:
            xx_min = obj_2.x_min
            xx_max = obj_2.x_max
        elif obj_1.x_max <= obj_2.x_min:
            xx_min = obj_1.x_max
            xx_max = obj_1.x_max
        elif obj_1.x_max > obj_2.x_min:
            xx_min = obj_2.x_min
            xx_max = obj_1.x_max
    elif obj_1.x_min >= obj_2.x_min:
        if obj_1.x_max < obj_2.x_max:
            xx_min = obj_1.x_min
            xx_max = obj_1.x_max
        elif obj_1.x_min > obj_2.x_max:
            xx_min = obj_1.x_min
            xx_max = obj_1.x_min
        elif obj_1.x_min < obj_2.x_max:
            xx_min = obj_1.x_min
            xx_max = obj_2.x_max
    return (zz_max - zz_min) * (xx_max - xx_min)
else:
    return 0

class Devision:
    """                          _
        return -
    """
```

```python

    def __init__(self, cord, obj_V, ind_obj):
        self.cord = cord
        self.obj_V = obj_V
        self.ind_obj = ind_obj
        self.dev(line=self.cord)

    def calc_v(self):  #
        return (self.x_max - self.x_min) * (self.y_max - self.y_min) * (self.z_max - self.z_min)

    def mass(self):  #
        return self.calc_v() * self.rho

    def dev_x(self):  #                   X
        obj_1 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.mean_x(),
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        obj_2 = FinVol(
            self.obj_V.mean_x(), self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
```

```
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        all_obj = []
        all_obj.append(obj_1)
        all_obj.append(obj_2)

        BAT.pop(self.ind_obj)  #
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[0])  #      -1
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[1])  #      -2

    def dev_z(self):  #                   Z
        obj_1 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.mean_z(),
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C, self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m, self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        obj_2 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.mean_z(), self.obj_V.z_max,
```

```
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C,
             ↪  self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m,
             ↪  self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        all_obj = []
        all_obj.append(obj_1)
        all_obj.append(obj_2)

        BAT.pop(self.ind_obj)
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[0])
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[1])

    def dev_y(self):  #                  Y
        obj_1 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.y_min, self.obj_V.mean_y(),
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C,
             ↪  self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m,
             ↪  self.obj_V.j_ix,
            self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        obj_2 = FinVol(
            self.obj_V.x_min, self.obj_V.x_max,
            self.obj_V.mean_y(), self.obj_V.y_max,
            self.obj_V.z_min, self.obj_V.z_max,
            self.obj_V.rho, self.obj_V. , self.obj_V.C,
             ↪  self.obj_V.rhoR, self.obj_V.id_m,
             ↪  self.obj_V.j_ix,
```

```
                self.obj_V.j_iy, self.obj_V.j_iz)

        all_obj = []
        all_obj.append(obj_1)
        all_obj.append(obj_2)

        BAT.pop(self.ind_obj)
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[0])
        BAT.insert(self.ind_obj, all_obj[1])

    def dev(self, line):
        """                           """
        if line == 1:  #   X
            self.dev_x()
        elif line == 2:  #   Y
            self.dev_y()
        elif line == 3:  #   Z
            self.dev_z()

class FinVol:
    def __init__(self, x_min, x_max, y_min, y_max, z_min,
      ↪  z_max, rho,  , C, rhoR, id_m, j_ix, j_iy, j_iz):
        self.x_min = x_min
        self.x_max = x_max
        self.y_min = y_min
        self.y_max = y_max
        self.z_min = z_min
        self.z_max = z_max
        self.rho = rho  #
        self.  =    #
```

```
        self.C = C  #
        self.rhoR = rhoR
        self.id_m = id_m
        self.j_ix = j_ix  #
        self.j_iy = j_iy  #
        self.j_iz = j_iz  #
        self.T_vol = 20  #

    def __str__(self):
        return f"x_min - {self.x_min} x_max - {self.x_max} y_min - {self.y_min} y_max - {self.y_max} z_min - {self.z_min} z_max - {self.z_max}\n"

    def mean_x(self):  #
        return (self.x_max + self.x_min) / 2

    def mean_y(self):
        return (self.y_max + self.y_min) / 2

    def mean_z(self):
        return (self.z_max + self.z_min) / 2

    def mean_x_y_z(self):
        return [self.mean_x(), self.mean_y(), self.mean_z()]

"""    json """
with open("data_81.json", "r") as read_file:
    data = json.load(read_file)
"""     BAT   json """
```

```
    BAT = []
    for key, val in data.items():
        BAT.append(
            FinVol(x_min=val.get("x_min"),
                   x_max=val.get("x_max"),
                   y_min=val.get("y_min"),
                   y_max=val.get("y_max"),
                   z_min=val.get("z_min"),
                   z_max=val.get("z_max"),
                   rho=val.get("rho"),
                    =val.get(" "),
                   C=val.get("C"),
                   rhoR=val.get("rhoR"),
                   id_m=val.get("id_m"),
                   j_ix=val.get("j_ix"),
                   j_iy=val.get("j_iy"),
                   j_iz=val.get("j_iz")))
    "                       "
    matrix_zy = []
    for i in range(len(BAT)):
        mini_lst = []
        for j in range(len(BAT)):
            if i == j:
                mini_lst.append(0)
            else:
                mini_lst.append(square_zy(BAT[i], BAT[j]))
        matrix_zy.append(mini_lst)

    matrix_zx = []
    for i in range(len(BAT)):
```

```
            mini_lst = []
            for j in range(len(BAT)):
                if i == j:
                    mini_lst.append(0)
                else:
                    mini_lst.append(square_zx(BAT[i], BAT[j]))
            matrix_zx.append(mini_lst)

        matrix_xy = []
        for i in range(len(BAT)):
            mini_lst = []
            for j in range(len(BAT)):
                if i == j:
                    mini_lst.append(0)
                else:
                    mini_lst.append(square_xy(BAT[i], BAT[j]))
            matrix_xy.append(mini_lst)

        def X_min():
            xx_min = 0
            for elem in BAT:
                if elem.x_min < xx_min:
                    xx_min = elem.x_min
            return xx_min

        def X_max():
            xx_max = 0
            for elem in BAT:
                if elem.x_max > xx_max:
                    xx_max = elem.x_max
```

```
        return xx_max

    def Y_min():
        yy_min = 0
        for elem in BAT:
            if elem.y_min < yy_min:
                yy_min = elem.y_min
        return yy_min

    def Y_max():
        yy_max = 0
        for elem in BAT:
            if elem.y_max > yy_max:
                yy_max = elem.y_max
        return yy_max

    def Z_min():
        zz_min = 0
        for elem in BAT:
            if elem.z_min < zz_min:
                zz_min = elem.z_min
        return zz_min

    def Z_max():
        zz_max = 0
        for elem in BAT:
            if elem.z_max > zz_max:
                zz_max = elem.z_max
        return zz_max
```

```
        "                    _           "
        matrix_m = []

        for i in range(len(BAT)):
            mini_lst = []
            for j in range(len(BAT)):
                if i == j:
                    mini_lst.append(BAT[i]. )
                else:
                    mini_lst.append(matrix_i_j_m[BAT[i].id_m][BAT[j
            matrix_m.append(mini_lst)

        matrix_lambda = []
        """                         """
        for i in range(len(BAT)):
            mini_lst = []
            q = 0
            for j in range(len(BAT)):
                if matrix_zy[i][j] != 0:
                    mini_lst.append(matrix_m[i][j] * matrix_zy[i][j])
                    q = q - matrix_m[i][j] * matrix_zy[i][j]
                elif matrix_zx[i][j] != 0:
                    mini_lst.append(matrix_m[i][j] * matrix_zx[i][j])
                    q = q - matrix_m[i][j] * matrix_zx[i][j]
                elif matrix_xy[i][j] != 0:
                    mini_lst.append(matrix_m[i][j] * matrix_xy[i][j])
```

```
                q = q - matrix_m[i][j] * matrix_xy[i][j]
            else:
                mini_lst.append(0)
        mini_lst.insert(i, q)  #
        mini_lst.pop(i + 1)  #                  i+1
        matrix_lambda.append(mini_lst)

"""
      01
"""

def square_0(
        obj_1):  #                .
    xx_min = 0
    xx_max = 0
    yy_min = 0
    yy_max = 1
    X0_min = X_min()
    X0_max = X_max()
    Y0_min = Y_min()
    Y0_max = Y_max()
    Z0_min = Z_min()
    Z0_max = Z_max()
    nnn = 0
    S = 0
    if obj_1.z_max == Z0_max:
        S = (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
```

```
    if obj_1.z_min == Z0_min:
        S = S + (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.y_max == Y0_max:
        S = S + (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.y_min == Y0_min:
        S = S + (obj_1.x_max - obj_1.x_min) * (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.x_max == X0_max:
        S = S + (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    if obj_1.x_min == X0_min:
        S = S + (obj_1.z_max - obj_1.z_min) * (obj_1.y_max - obj_1.y_min) * matrix_i_j_m[3][3]
        nnn = nnn + 1
    return S

"                         Y"
# rhoR=0.07
matrix_I_y = np.matrix([[(BAT[i].j_iy ** 2) * (BAT[i].x_max - BAT[i].x_min) * (BAT[i].z_max - BAT[i].z_min) *
                         BAT[i].rhoR * (BAT[i].y_max - BAT[i].y_min)] for i in range(len(BAT))])

```

```
    "                        Z"
    # rhoR=1.6e-7
    matrix_I_z = np.matrix([[(BAT[i].j_iz ** 2) * (BAT[i].x_max - BAT[i].x_min) * (BAT[i].y_max - BAT[i].y_min) *
                             BAT[i].rhoR * (BAT[i].z_max - BAT[i].z_min)] for i in range(len(BAT))])

    "                        X"
    # rhoR=3.2e-6
    matrix_I_x = np.matrix([[(BAT[i].j_ix ** 2) * (BAT[i].z_max - BAT[i].z_min) * (BAT[i].y_max - BAT[i].y_min) *
                             BAT[i].rhoR * (BAT[i].x_max - BAT[i].x_min)] for i in range(len(BAT))])

    "         "
    result = matrix_I_z + matrix_I_x + matrix_I_y

    "                             "
    Temperature = np.matrix([[elem.T_vol] for elem in BAT])

    "              T01       "
    T01 = np.matrix([[square_0(elem)] for elem in BAT])

    """              T01                """
    T01D = list()
    for i in range(len(T01)):
        prom = []
        for j in range(len(T01)):
```

```
                if i == j:
                    prom.append(np.array(T01[i])[0][0])
                else:
                    prom.append(0)
            T01D.append(prom)

        T01D = np.matrix(T01D)

        """                matrix_lambda -
        ↪        """
        matrix_lambda = matrix_lambda - T01D
matrix_K_inv = []
"""     K      """
res1=0
for i in range(len(BAT)):
    ml = []
    for j in range(len(BAT)):
        if i == j:
            a = BAT[i].x_max - BAT[i].x_min
            b = BAT[i].y_max - BAT[i].y_min
            c = BAT[i].z_max - BAT[i].z_min
            res = 1/ (BAT[i].C * a * b * c * BAT[i].rho)
            if res > res1:
                res1=res
            ml.append(res)
        else:
            ml.append(0)
    matrix_K_inv.append(ml)
# print(BAT[0].C * a * b * c * BAT[0].rho)
matrix_K_inv = np.matrix(matrix_K_inv)
```

```
matrix_K_inv
"Excel"
import pandas as pd
Q=list()
qq=0
data = {} #
epsilon1 = 5e-2
temp=0
for i in range(len(Temperature)):
    data[i] = list()
res1=1
b= np.array(matrix_K_inv.dot(np.matrix(matrix_lambda)))
b,c= np.linalg.eig(b)
res1=1/max(abs(b))
# res1= (1/res1)/50
# count_time = int(3/min(abs(b)))
count_time = 10000000
a = 0
sh=0
for _ in range(count_time):
    sh += 1
    dt=Temperature
    Temperature = a*res1 + Temperature
    if sh == 10000:
        for i in range(len(Temperature)):
            data[i].append(np.array(Temperature[i])[0][0])
            qq=Temperature[i]
    if sh ==10000:
        sh =0
    dt=Temperature-dt
```

```
        matrix_square = np.matrix(matrix_lambda).dot(Temperature) + T01 * 20 + result
        a = matrix_K_inv*matrix_square
#       print(max(np.array(dt)))
# #         if max(np.array(dt)) < epsilon1:
# #             break
exel_data = pd.DataFrame(data)
exel_data.to_excel("output2.xlsx")
print(data)
print(res1)
```